

波動伝播の透過境界条件アルゴリズム

篠崎 志朗

Transparent boundary condition algorithm for wave propagation

Shiro SHINOZAKI

(May, 1994)

はじめに

無限の広がりをもつ媒質内での進行波の運動を、有限な大きさの計算領域のなかで再現させるには特別な境界条件が必要になる。たとえば自由空間における源からの電磁放射を想像してみればよい。源から発せられた電磁波は、進行波として無限に広がる空間のなかを伝播していく。この様子を源を含む有限な計算領域の中で再現しようとするなら、任意に設けた計算領域の境界から不要な反射波を発生させてはいけぬ。すなわちあたかも媒質が無限であると同じように、計算領域のなかには進行波のみが存在している状態でなくてはいけぬ。したがって境界を無反射なものにするためには、つぎつぎと境界にやってくる波を計算領域の外へ透過させるか、または波の吸収体の人工的な層を境界に付加しこの中で波を減衰させるかなど、特別な境界条件を設定することが必要となる。

多くの物理現象の解析では、固定端あるいは自由端の境界条件で十分である。その理由は、限られた大きさをもつ弦や膜の振動のように、ほとんどの解析では媒質の大きさが有限であり、また入射波と反射波の重ね合わせで向じる媒質内での定在波を扱えば済むからである。したがって計算領域の境界においては、反射波を発生する固定端あるいは自由端の境界条件を用いてもかまわない。

しかし電磁放射や地震波の計算でみられるように、波を伝える媒質が無限の広がりをもち、その中で一方

に進む波しか存在しない場合には、反射波を発生するような固定端あるいは自由端の境界条件は適用できない。また、一個のパルスが無限のかたへ伝播していく例を考えればわかるように、計算領域の大きさを周期とする周期境界条件も適用できない。したがって無限の広がりの中で生じる波動伝播の現象を、任意の小さな有限領域で再現させるにはどうしても境界条件—たとえば、つぎつぎとやってくる波を境界で透過させる、あるいは境界で吸収する—ようなアルゴリズムが求められる。

ここでは一次元の波動伝播を取り上げ、これにインピーダンス整合の考えを用い、反射波を発生させずに波を通過させる透過境界条件のアルゴリズムについて述べる。このアルゴリズムは、多くの一次元波動伝播で有効であり応用性の広いものである。

1. 一次元連続体での波動伝播

ここでは二つのことを示す。一つは、離散系媒質モデルで透過境界条件を導く際に必要となるいくつかの物理量の定義である。このため波を伝播させる媒質として一次元の弦をとり、そこで起きる横波の伝播についてこれらの物理量を定義する。弦は x の正負の方向に無限に伸びる連続的な媒質とし、また十分に柔らかいため非分散性の媒質でもあるとする。もう一つは、透過境界条件とは異なる手法、すなわち抵抗をもつ媒質によって波を減衰させ吸収する方法は、必ず反射波の発生を伴うことである。このため境界に吸収体を配置する方法は、無反射な境界条件として不十分なものであることを、

まず連続体媒質の波動伝播で示しておく。

1.1 弦の波動方程式

速度 c で弦を伝播していく擾乱 (以後乱れとする) には, サイン波のように周期的な波もあれば, 一個のパルスのような非周期的なものもある。このような乱れの振幅 ψ は,

$$\psi = \psi_+(x-ct) \quad \text{or} \quad \psi_-(x+ct) \quad (1)$$

と表せる。 t は時間, x は弦の点をもつ伝播方向の位置座標を示す。また ψ の添字+は, 乱れが時間とともに x の正方向に伝播する進行波であることを, -は逆に負の方向に進む乱れであることを示す。上の式(1)は, 乱れの振動数成分が, 形を変えずに媒質 (弦) を伝播していくことを示している。ここで ψ_+ は次の式(2)を満たす。

$$\frac{\partial \psi_+}{\partial t} + c \frac{\partial \psi_+}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

この式(2)は, 進行波に対する波動方程式である。また, この式は, 弦の微小部分あるいは媒質粒子がもつ伝播方向に垂直な横方向の速度 ($\partial \psi_+ / \partial t$) と, そこでの弦の傾き ($\partial \psi_+ / \partial x$) との関係式, あるいは粒子の運動速度と波の伝播速度 c との関係式を与える。逆方向に伝播する ψ_- については, 式(2)の中にある+をすべて-に置き換えればよい。

式(2)は進行波 ψ_+ についてだけの波動方程式である。しかしここで式(2)を更に時間 t で微分すると, いわゆる波動方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

が得られる。 ψ_+ と ψ_- はともにこの方程式を満たすから, 波動方程式(3)の解には進行波 ψ_+ とその逆方向の波 ψ_- の二つが含まれる。したがって式(2)と違い, 式(3)の一般解 ψ は ψ_+ と ψ_- の重ね合せになる。ここで波動方程式(3)の解として, 振動数が ω , 振幅が A の波動をとる。これを式(4)の複素表示で表し, この実数部を求める解とする。

$$\psi = A \exp[i(kx - \omega t)] \quad (4)$$

振幅 A は一般に複素数であり, i は $(-1)^{1/2}$ を, k は波数でこの波の波長を λ とすると $k = 2\pi/\lambda$ で与えられる。式(4)を式(3)に入れると, 分散関係として式(5)が得られる。

$$(ck)^2 = \omega^2 \quad \text{or} \quad ck = \pm \omega \quad (\omega > 0) \quad (5)$$

ここで $c = \omega/k$ は波の位相速度であり, $ck = \omega$ を用いると式(4)は次のようにも表せる。

$$\psi = A \exp[ik(x - ct)]$$

これは式(1)の中の進行波 $\psi_+(x-ct)$ を示している。また分散式(5)のもう一つの関係 $ck = -\omega$ からは, 逆方向の波 $\psi_-(x+ct) = A \exp[ik(x+ct)]$ が得られる。

波の伝播速度 (この場合, 位相速度) は, 媒質の性質によって変化する。したがって速度は媒質の物性値で示されるはずである。しかし式(5)の分散関係には, 媒質の物性値があらわれていない。伝播速度と物性値の関係は, 波動方程式(3)を媒質の微小部分で成立する運動方程式として導きだすと明瞭になる。弦の場合その結果は,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (6)$$

となる。ここで T は弦が平衡状態にある時の張力, ρ は弦の質量密度である。ここで式(3)と(6)は同じ現象を表しているから, 乱れの伝播速度 c は

$$c = \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} \quad (7)$$

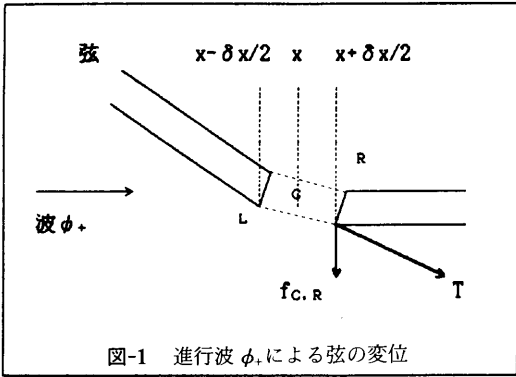
となり, 伝播速度 c が媒質の物性値で示される。

1.2 弦のインピーダンス Z_0 とエネルギーの流れ

波を伝播させる弦は質量をもち, その中では張力が働いている。もし乱れが弦の部分に到達し, そこで弦を変位させようとするなら, この部分の質量がもつ慣性は変化に抵抗する。また弦の中で働いている張力は, 変位しようとする部分を元の位置に戻そうと抵抗する。したがって弦の質量が大きく張力も大きいほど, 乱れは伝わりにくくなる。すなわち媒質のもつ慣性と弾性力は, 乱れによって引き起こされる媒質自身の運動に対し, あたかも抵抗力のように作用する。波を伝える媒質のこのような性質を, 波動インピーダンスまたは固有インピーダンスと呼び, これは媒質の慣性と弾性で表現される。

進行波 $\psi_+(x-ct)$ に対する弦の固有インピーダンス Z_0 を求めてみる。いま乱れ ψ_+ が位置 x に到達し, そこで長さ Δx をもつ弦の部分 C を動かそうとする状況を考える。この時 C の右側にある弦の部分 R は, C を動かせまいと横方向の弾性力 $f_{c,R}$ を及ぼす。この力 $f_{c,R}$ は部分 C の右端における変位 ψ_+ の勾配に比例し, それは $T(\partial \psi_+ / \partial x)_R$ で与えられる。ここで $f_{c,R}$ の添字 C は位置 x を, R は右端の位置 $x + \Delta x/2$ を表すものとする。弾性力 T による横方向の力 $f_{c,R}$ は, 式(2)を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned} f_{c,R} &= \left[T \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial x} \right) \right]_R \\ &= \left[- \left(\frac{T}{c} \right) \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial t} \right) \right]_R \end{aligned}$$



ここで二番目の式に移る際、式(2)を用いたこの式は、弦の右側からの弾性力 $f_{c,R}$ が弦の右側がもつ速度に比例した抵抗力となって部分 C に作用することを示している。そこで横方向の力 $f_{c,R}$ と速度 $(\partial\psi_+/\partial t)_R$ の比に負号をつけたものを、進行波に対し弦の右側部分がもつインピーダンス Z_R と定義する。

$$Z_R = -\frac{f_{c,R}}{\left(\frac{\partial\psi_+}{\partial t}\right)_R} = \left(\frac{T}{c}\right)_R = \left[(\rho T)^{1/2}\right]_R \quad (8)$$

いまの場合、弦は一樣な媒質であるから、弦上のどの点をとっても式(8)が成立する。また式(8)で与えられるインピーダンスを、常に進行波の前面にある右側の弦のもつインピーダンスと了解しておけば、式(8)にある R と + の添字を除いておける。したがって式(8)からこの添字を除いたものを、あらためて波動に対する弦の固有インピーダンス Z_0 として次のように定義する。

$$Z_0 = -\frac{T\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = \frac{T}{c} = (\rho T)^{1/2} \quad (9)$$

このように定義式(9)は、媒質の慣性と弾性に対応する ρ と T を含んでおり、これはこの節の最初で述べた議論にも合致している。

一方、逆方向の波 ψ_- に対するインピーダンスを求めるには、式(9)の ψ として ψ_- を用いる。 ψ_- の場合 $\partial\psi_-/\partial t = c(\partial\psi_-/\partial x)$ であるから、得られるインピーダンスは $-Z_0$ となり負号がつく。すなわち波の伝播方向によりインピーダンスが変化する。

波の位相速度 c とインピーダンス Z_0 は、媒質を特徴づける重要な量である。また進行波に対する境界条件をつくる上でも重要な役割をになう。ここではインピーダンスのもう一つの重要な役割りであるエネルギー伝播につ

いて述べてみる。エネルギーをはこぶ実際の担い手は媒質である。このためエネルギーの流れは媒質の物性値に依存し、とくに波の伝播を決めるインピーダンスは、エネルギーの流れに深く関与する。

進行波は定在波と違いエネルギーを運ぶ。ここでは、進行波 ψ_+ によって運ばれる単位時間あたりのエネルギーの流れを求めてみる。まず図-1と同様に弦の部分 C をとりあげよう。C の右側の部分 R が単位時間あたり C になす仕事は、R が C に及ぼす力 $f_{c,R} = T(\partial\psi_+/\partial x)_R$ と C の速度 $(\partial\psi_+/\partial t)_x$ の積に等しい。この仕事の割合は、 $\delta x \rightarrow 0$ の極限で x を境に右から左へ単位時間に流れるエネルギーを表す。これに負号をつけたものは、逆に x を境に弦の左から右へ x の正方向に伝播するエネルギー流 $P_+(x, t)$ となる。これは

$$P_+(x, t) = -T \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial t}\right) \quad (10)$$

$$= Z \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial t}\right)^2 \quad (11)$$

と表せる。式(10)から(11)への書き換えには、式(2)と(9)を用いている。一般にインピーダンスは複素数であるため、式(11)では実数の Z_0 と異なる記号 Z を用いた。

実際に必要となるエネルギー流は、式(11)のように時々刻々に変動するものではなく、ある時間間隔、たとえば波の一周りにわたっての平均なエネルギーの流れである。式(11)の時間平均をとったものを $\langle P_+(x) \rangle$ とすると、これは次のようになる。

$$\langle P_+(x) \rangle = \frac{1}{2} R \cdot P \cdot \left[Z \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial t}\right)^* \right]$$

$$= \frac{1}{2} Z_r \left| \frac{\partial\psi_+}{\partial t} \right|^2 \quad (12)$$

ここで $R \cdot P \cdot []$ は $[]$ 内の実部を、また * は共役複素をとることを意味する。式(12)は、インピーダンスの実部 Z_r のみがエネルギーの流れに寄与していることを示す。もし進行波を式(4)とするなら、 x を境に左から右へ流れるエネルギー流の時間平均は

$$\langle P_+(x) \rangle = \frac{1}{2} Z_r \omega^2 |A|^2 \quad (13)$$

となる。一方、エネルギー流は、弦がもつ波のエネルギー密度 U_e にエネルギーの伝播速度 v_e を掛けた式 $P_+ = U_e \cdot v_e$ で表せる。エネルギー密度の時間平均 $\langle U_e(x) \rangle$ は、

$$\langle U_e(x) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial x}\right)^2 \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial\psi_+}{\partial t} \right|^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2 \quad (14)$$

となるから、これと $\langle P_+(x) \rangle = v_e \cdot \langle U_e(x) \rangle$ および式(13)を用

いるとエネルギー速度が

$$v_e = \frac{Z_r}{\rho} \tag{15}$$

と表せる。もし媒質が非分散性でかつエネルギー非損失なものなら $Z_r = Z_0$ となり、これと式(9)を用いると $v_e = c$ となることが示される。すなわち エネルギーの伝播速度は位相速度に等しくなる。

非分散性で非損失な連続媒質では、式(9)にあるようにインピーダンスが波の振動数 ω に依存せず実部だけの実数という特徴がある。しかし実際には、波を伝える多くの媒質は分散性で、かつ損失をもつ。すなわち 現実の媒質は波を減衰させる抵抗をもち、この抵抗の存在によって インピーダンスは実数から複素数に変わり、かつ振動数 ω に依存するようになる。これについては、後で再び述べてみる。

1.3 インピーダンスの変化する媒質中での波動伝播

弦が徐々に重くなったり固くなったりしていくように、媒質のインピーダンスがゆっくりと変化するときの波動伝播について述べてみる。まず 簡単な状況の場合について伝播の方程式を導いてみる。弦が $x = x_0$ を境に異なるインピーダンスに分かれ、左側が Z_L 、右側が Z_R であるとする。長さ δx の弦の部分 C をとり、その中心を $x = x_0$ におく。周りにある左右の弦からは、力 $f_{C,L}$ と $f_{C,R}$ が部分 C の両端に働いている。ここで進行波による弦の変位を $\psi(x, t)$ とすると、 $f_{C,L}$ と $f_{C,R}$ は次のようになる。

$$f_{C,R} = \left[-T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_L = \left[Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right]_L$$

$$= Z_L \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_x - \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right)_x \right] \tag{16}$$

$$f_{C,L} = \left[T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_R = - \left[Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right]_R$$

$$= -Z_R \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_x + \frac{\delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right)_x \right] \tag{17}$$

ここで $(\delta x)^2$ 以上の高次項を落としている。こうしてインピーダンスの境界部分 C に対する運動方程式は、 $\rho = (1/2)(\rho_L + \rho_R)$ とおいて

$$(\rho \delta x) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = f_{C,L} + f_{C,R}$$

$$= (Z_L - Z_R) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

$$- \frac{\delta x}{2} (Z_L + Z_R) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right)$$

となる。右辺の第二項に進行波の伝播式(2)を用いると、次の運動方程式が得られる。

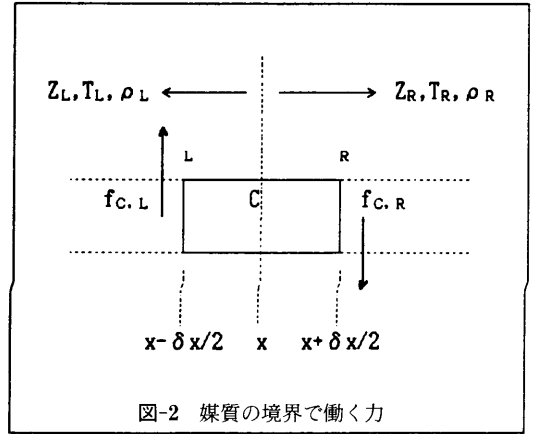


図-2 媒質の境界で働く力

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) + \left[\frac{Z_R - Z_L}{\delta x} \right] \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{c}{2} (Z_R + Z_L) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \tag{18}$$

この式(18)から、境界部分 C には二つの力が働いていることがわかる。まず一つは、波動方程式が必ずもつ変位の曲率に比例した復元力で、右辺がこれを示している。しかし この場合、 C における平均的インピーダンス $(1/2)(Z_R + Z_L)$ が曲率に乘じられている。もう一つは、左辺第二項にあるインピーダンスの変化からくる力である。これはインピーダンスの勾配 $(Z_R - Z_L)/\delta x$ に比例した大きさをもつ力で、 Z が境界を境にどう変化するか、その変化の正負によって向きを変える力である。 $Z_R > Z_L$ の場合、この新たに付加される力は速度 $(\partial \psi / \partial t)$ に比例する抵抗力として部分 C に作用し、その結果 右側に進もうとする進行波の振幅を減衰させる。この力は丁度、波が軽く柔らかい弦から 重く堅い弦へ進む時、振幅が小さくなる現象を説明している。 $(Z_R < Z_L)$ の場合は、この逆になる。

インピーダンス境界を境に、波の振幅が変化する背景には、境界面での反射波 ψ_r の発生がある。そして 進行波から反射波を除いた透過波 ψ_t だけが境界の右側に進む。この場合、境界での反射係数 R_c 、透過係数 T_c は、境界での変位 ψ の連続性および横方向の力 $T(\partial \psi / \partial x)$ の連続性の二つの条件から導かれる。その結果は、

$$R_c = \frac{Z_L - Z_R}{Z_L + Z_R}, \quad T_c = \frac{2 Z_L}{Z_L + Z_R} = 1 + R_c \tag{19}$$

となる。この係数と入射波 ψ を用いて反射波と透過波の振幅 ψ_r と ψ_t とは、

$$\psi_r = R_c \psi, \quad \psi_t = T_c \psi \tag{20}$$

と表せる。一般に Z が複素数であるため、 R_c と T_c を通じ、 ψ_r と ψ_t の位相も変化する。反射係数 R_c は -1 から $+1$ の値をとる。比 $Z_R/Z_L = \infty$ のとき、 R_c は -1 となり、進行波はすべて変位が反転して反射される。これは波が堅い壁にぶつかるか、または 弦の端が固定されているかの 固定端境界に相当する。一方 $Z_R/Z_L = 0$ のとき、 $R_c = 1$ となり、この場合も進行波はすべて変位が反転せずに反射される。これは 弦の端が抵抗のない自由な状態にある自由端境界に相当する。

式(19)より、反射波を発生させないためには $Z_L = Z_R$ であればよいことがわかる。しかし これは境界の左右が、まったく同じ媒質であることを意味しない。たとえ媒質が違っていても、媒質のインピーダンスが等しければよい。すなわち $\rho_L T_L = \rho_R T_R$ が成り立っていれば、境界は無反射となる。これをインピーダンス整合と呼ぶ。

ここで媒質のインピーダンス Z が位置 x の関係 $Z(x)$ で、 x とともにゆっくり連続的に変化するときの伝播方程式を示しておく。式(18)は、境界にまたがった部分 C についてだけの方程式である。しかしいまの場合 $Z(x)$ は x によって変化するのだから、式(18)の導出で設けたインピーダンス境界が、 δx 間隔で無限にあると考えればよい。すると、それぞれの境界の媒質部分について式(18)が成立しているのだから、 $\lim \delta x \rightarrow 0$ の極限をとると、媒質の各点では次の式が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dZ}{dx} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ = \frac{Z}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \tag{21}$$

この場合 ρ , T , Z は x に依存するから、伝播速度 c は位置 x によって変化する。

この式は 左辺第二項の (dZ/dx) の存在により、媒質内で反射波が発生することを示している。すなわち インピーダンス Z が変化する媒質中を進む波は、次々と反射波を発生させながら媒質を伝播していくことになる。そして 媒質 (の各粒子) が次々に発生させるこの反射波は、互いに重なり合い干渉しながら再びもと来た経路を戻っていく。このような状況は、吸収体を置き、これで境界を無反射にしようとする方法の難しさを示している。すなわち 計算領域の境界層として、インピーダンスが徐々に変化する媒質を配置し、そこで波を吸収しようとする方法は、かえって境界層のなかで反射波の連続的な発生をまねき、計算領域にこの反射波が混入してい

くこととなる。この点については、次節で詳しく述べてみる。

1.4 減衰抵抗をもつ吸収境界層での波動伝播

これまでの準備をもとに、領域境界に減衰層を配置し、進行波を境界で吸収する方法を具体的に検討してみる。そして 吸収体による人工的な境界条件は、不十分な手法であることを示してみる。

波を伝える媒質は、単位長さ当たり β の抵抗をもつとする。とりあえず 抵抗 β は定数としておく。媒質の抵抗により弦の δx の部分には、あらたに $-(\beta \delta x) (\partial \psi / \partial t)$ の抵抗力が付加され、媒質中での波動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = -\frac{\beta}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \tag{22}$$

この物理状況としては、たとえば $x=0$ を境に、弦の右側がゼリー状の流体に浸っているような場合を考えればよい。ゼリー状の流体は、弦の運動に対し抵抗体として働く。ここで、 $T/\rho = c^2$, $\beta/\rho = \Gamma$ とおいて式(22)を書き直すと、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Gamma \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \tag{23}$$

となる。解 ψ として式(4)の形のものを求めるため、これを式(23)に入れると、分散関係

$$(ck)^2 = \omega^2 + i\omega\Gamma$$

を得る。振動数 ω は正の実数であるから、これを満たす波数 k は複素数となり、これを $k_r + ik_i$ とおく。抵抗が非常に小さく $\Gamma/\omega \ll 1$ が成り立つ場合、分散関係は

$$k_r + ik_i = \frac{\omega}{c} + i \frac{\Gamma}{2c} \tag{24}$$

となる。この場合 進行波の解 ψ として、 x の正方向に進むにつれ振幅が小さくなる

$$\psi = A \exp \left[-\left(\frac{\Gamma}{2c} \right) x \right] \exp [i(kx - \omega t)] \tag{25}$$

の減衰振動解を得る。一方、抵抗が非常に大きく $\Gamma/\omega \gg 1$ の場合、分散関係は

$$k_r + ik_i = \left(\frac{\omega\Gamma}{2c^2} \right)^{1/2} (1+i) \tag{26}$$

となり、 ψ は式(25)と同形の減衰振動解になる。しかし減衰係数は $(\omega\Gamma/2c^2)^{1/2}$ と大きく、吸収体の中では波長程度の距離を進むだけで振幅が急激に減衰する。抵抗の大きな吸収体の中でも振動数は変わらないが、波長と伝播速度は大きく変化する。 $\Gamma/\omega \gg 1$ の場合、吸収体の外での波長と速度を λ, c 、吸収体の中での波長と速度を λ_a, c_a とすると、

$$\lambda_a = \frac{2\pi}{k_r} = \lambda \left(\frac{2\omega}{\Gamma} \right)^{1/2} \ll \lambda$$

$$c_a = \frac{\omega}{k_r} = c \left(\frac{2\omega}{\Gamma} \right)^{1/2} \ll c$$

となる。すなわち、媒質の抵抗が大きいくほど、その中で波長と伝播速度は小さくなる。

次にこの吸収体のインピーダンス Z_a を求めてみる。インピーダンスの定義式(9)と進行波の式(4)を用いると、

$$Z_a = T \frac{k}{\omega} = \frac{T}{\omega} (k_r + ik_i)$$

と、インピーダンス Z が複素数になる。 k_r と k_i に式(24)、(26)の値を入れると

$$Z_a = Z_0 \left[1 + i \frac{\Gamma}{2\omega} \right],$$

抵抗が小さい場合 $\left(\frac{\Gamma}{\omega} \ll 1 \right)$ (27)

$$= Z_0 \left(\frac{\Gamma}{2\omega} \right)^{1/2} (1 + i),$$

抵抗が大きい場合 $\left(\frac{\Gamma}{\omega} \gg 1 \right)$ (28)

となり、抵抗の存在によりインピーダンス Z_a が振動数 ω に依存するようになる。ただし、 Z_0 は式(9)で与えられる抵抗がないときのインピーダンス (T/c) である。

また 進行波に対する吸収体境界での反射係数 R (前出の記号 R_c から添字 c を除く) を、抵抗が小さい場合について式(19)から求めると、

$$R(\omega) = \left(\frac{Z_0 - Z_a}{Z_0 + Z_a} \right) \sim -i \frac{\Gamma}{4\omega}$$

$$= \frac{\Gamma}{4\omega} \exp\left(\frac{-i\pi}{2}\right) \quad (29)$$

となり、反射係数は振動数に依存し かつ 反射波の位相は $\pi/2$ だけ遅れるようになる。

このように 吸収体の抵抗 β の存在で反射波が発生するが、抵抗が小さい ($\Gamma/\omega \ll 1$) ため 反射係数の大きさ $|R| = \Gamma/4\omega$ は小さく、境界面での反射は微小であることがわかる。したがって境界へ到達した進行波は、ほぼそ

のまま透過波となって境界層の中を進んでいく。その際式(25)で示されるように、ゆっくりと減衰しながら吸収体の中を伝播していき、エネルギーのほとんどが徐々にゼリー状の吸収体に吸収される。このとき 振幅が $1/e$ になる減衰距離 $2c/\Gamma$ は、すべての振動数について同じである。

以上の議論から、計算領域の境界として小さな抵抗をもつ吸収媒質を配置し、これによって境界面からの反射を極力少なくし、かつ 境界層の中で波を徐々に減衰させることが可能に思える。しかし 境界面からの反射を小さくしようとすればするほど、抵抗 β を小さくしなければならず、その結果、境界層は厚くなるという欠点が出てくる。このことは、実際に離散系の吸収体モデルで計算をおこなう際、計算時間がかかりすぎたり、計算領域のメッシュ数に比べ 境界層のメッシュ数がその数倍にもなる、という非効率的な状況をもたらす。

たとえば 離散系モデルで計算する際、境界層の厚さとして、どの程度のメッシュ数が必要となるか見積もってみる。いま メッシュ間隔を a とおき、弦の弾性力 T と密度 ρ できまる固有な振動数を $\omega_0 (= T/\rho a^2)$ とする。また 弦を伝わる進行波の振動数を ω とし、位相速度を $c \sim \omega_0 \cdot a$ と近似する。このとき 減衰距離 $2c/\Gamma$ は、式(29)で与えられる R と Γ の関係を用いて

$$\frac{2c}{\Gamma} \sim \frac{2\omega_0 \cdot a}{4\omega |R|} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \left(\frac{a}{|R|} \right) \quad (30)$$

となる。波の振幅が $1/e$ に減少するまでに必要なメッシュ数は、これをメッシュ間隔 a で割って $(1/2) (\omega_0/\omega) (1/|R|)$ と与えられる。例えば 伝播する波の振動数 $\omega \sim \omega_0$ とし、境界面での反射係数を $|R| \sim 0.01$ と 1% におさえる場合、減衰距離のメッシュ数は 50 となる。しかしこれは振幅が $1/e$ になるだけの必要なメッシュ数であり、これだけではまだ境界層の右終端にある媒質粒子は大きく振動している。もし 終端粒子の振幅が元の振幅の $1/1000$ 程度と微小な振動の状態にするためには、 $e^{-7} \sim 10^{-3}$ であるから、境界層の厚さとして減衰距離の 7 倍程度が必要になる。したがって メッシュ数が 350 の境界層を配置しなければならない。これは大き過ぎて、計算効率を下げってしまう。

境界層の厚さを減じる方法として、次のような試みが考えられる。すなわち 媒質の抵抗 β を x の関数とし、境界から遠ざかるにしたがって徐々に大きくし、波の吸収を強めていく方法である。この場合 境界層の厚さは、抵抗 β が一定のときに比べ 確かに短くてすむ。しかし 抵抗 $\beta(x)$ を通じて、インピーダンスが x に依存するこ

となる。(式(7)の吸収体インピーダンスにある Γ は、 $\Gamma(x) = \beta(x)/\rho$ となる。)

これは前節の終わりに述べた状況とまったく同じで、媒質中で抵抗を変化させることは、境界表面だけではなく境界層全体からも身射波を発生させることになる。したがって進行波を完全に吸収できないこととなり、もっと発想を変えた無反射境界の方法が求められる。

2. 一次元離散系媒質での波動伝播と透過境界条件

ここでは、媒質のインピーダンスを利用した無反射境界について述べる。前節で述べた吸収境界層の方法では、境界層として多くのメッシュを計算領域に付加する必要があり、結果として計算すべきメッシュ数を増大させてしまう。加えて境界層のメッシュ数を、式(30)にしたがって進行波の振動数や反射係数の値により調整しなければならず、人工的で煩雑でもある。しかし何よりも重大な欠点は、波を吸収するために設けた媒質自身が反射波を発生させ、結果として反射波を完全に除去できない点にある。

一方これから述べる透過境界の方法は、前節 1.3 で述べたインピーダンス整合の考え方を利用したものである。すなわち、無限に続く弦を右側で切断した時、この右端の媒質粒子にあたかもまだ右側に弦が続いているかのような力を作用させ、この力によって切断境界の影響を取り除く方法である。したがって吸収体の場合と違い、境界は厚さをもつ層にならず、ただ一個だけの境界粒子になる。このような透過境界の方法は、次のような利点をもつ。

- (1)境界にメッシュを付加することもないため、計算領域を拡張せずに済み、したがって、余分な計算もなく効率的である。
- (2)インピーダンスが整合しているため、理論的に反射波が存在しない。
- (3)進行波の振動数の違いにより、境界の取り扱いを変

えるなどの人工的な操作がなく簡潔な方法である。

しかしこの方法によっても適用限界をもつ場合があり、このような物理状況については最後に述べてみる。

2.1 波の伝播方程式と分散関係

波を伝える一次元の媒質、たとえば弦のモデルとして図-3にあるような質量 m をもつ媒質粒子を一定間隔 a で並べたものをとる。図は平衡にあるときの状態を示している。粒子を結ぶ紐は質量をもたないが弾性をもちこのため平衡時には粒子間に弾性力 T が働いているものとする。間隔 a と質量 m の比を一定に保ちながら、 a と m をゼロの極限にもっていくと、密度 $\rho = m/a$ の連続的な弦に移行する。以下では、このような媒質モデルによって弦の横波伝播を解析する。

媒質が離散系に移ると、連続系にはなかった二つの特徴が現れてくる。その一つは、伝播速度が波の振動数によって変化する分散性の出現である。もう一つは、波がある振動数以上になると、媒質中を伝播できず急激に減衰する現象である。すなわち遮断周波数 ω_c の出現である。このため図-3のような離散系モデルは、ある周波数以下の波だけを通すローパスフィルターとしても使われる。これらの特徴は、媒質を有限な間隔 a で刻むために生じるもので、波長 λ と間隔 a の比 λ/a あるいは波数 k と間隔の積 ka がゼロになる極限で消失する。

この媒質系での波動伝播として次のような系の状況を考える。 x の正(右)負(左)両方向へ無限に続く弦があり、弦の原点 $x_0 = 0$ に外力が加えられて波が発生し、これが左右へ伝播していくものとする。計算領域には無限の長さの弦を収納できないから、まず原点 x_0 から右側に距離 $L = N \cdot a$ だけ離れた点で弦を切断する。また波の伝播は原点を中心に左右対称であるから、原点から左にある無限長部分を切断する。こうして解析対象とする弦の領域は、原点から右にある長さ L の部分だけでよいことになる。したがって計算領域は、弦の原点 x_0 から長さ

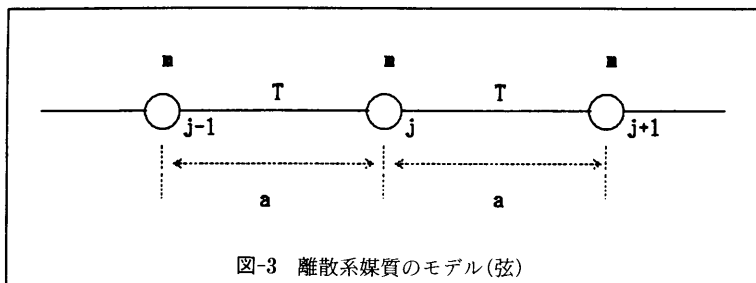


図-3 離散系媒質のモデル(弦)

L の部分だけを含めばよく、いまの場合 弦の右端が着目すべき境界となる。

媒質をつくる粒子には、波の伝播する x 方向に沿い、左端のものから $0, 1, 2, 3, \dots, N$ と右端の粒子 N までに番号が振られているものとする。また 粒子は、左右のすぐ隣りの粒子としか相互作用をしないものとする。いま j 番目の粒子の x 座標を x_j , その横方向の変位を $\psi(x_j, t)$ とし、これを簡潔に $\psi_j(t)$ と表す。 j 番目の粒子(以後 j と簡潔に表示する。)には、 $j-1$ が j に及ぼす横方向の力 $f_{j,j-1}$ と $j+1$ が j に及ぼす横方向の力 $f_{j,j+1}$ が作用しており、その力は次のように表せる。この状況を図-4 に示す。

$$f_{j,j-1} = \frac{T}{a} (\psi_{j-1} - \psi_j) \tag{31}$$

$$f_{j,j+1} = \frac{T}{a} (\psi_{j+1} - \psi_j) \tag{32}$$

これらはそれぞれ 前出の式(16), (17)で与えられた力 $f_{c,L} = -T(\partial\psi/\partial x) \sim f_{s,j-1}$, $f_{c,R} = T(\partial\psi/\partial x) \sim f_{s,j+1}$ に対応している。ただし 式が煩雑にならないよう $\psi_j(t) = \psi_j$ と時間 t の依存性を省略して表し、これは力についても同様とする。

粒子 j には、もう一つ横方向の力 g_j が働く。この力 g_j

は、媒質に作用する外力を、あるいは媒質自身もつ抵抗力や媒質内でのインピーダンスの変化に起因する力をあらわすものとしておく。しかし いまの場合、 g_0 を原点に働く外力とし、この g_0 だけが値を持ち、それ以外はすべて $g_j=0$ として議論をすすめる。

さて粒子 j ($\neq 0, N$) に対する運動方程式は、次のように書かれる。

$$m \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right) = f_{j,j-1} + f_{j,j+1} = \frac{T}{a} (\psi_{j-1} - 2\psi_j + \psi_{j+1}) \tag{33}$$

$j=0$ の粒子の場合には、上式の右辺に g_0 が付加される。また、伝播の様子が原点について対称だから、 $\psi_{-1} = \psi_1$ が成り立つ。この式(33)は、 m と a をゼロにする極限で連続系の波動方程式(3)になる。したがって式(33)の解 ψ_j として波動方程式(3)の解である式(4)と同様なものが予想され、これを

$$\psi_j(t) = A \exp[i(kx_j - \omega t)] \tag{34}$$

と置く。ただし $x_j = j \cdot a$, k は波数 $2\pi/\lambda$ である。

この解(34)を式(33)に入れると、離散系媒質で成り立つ分散関係式(35)が得られる。

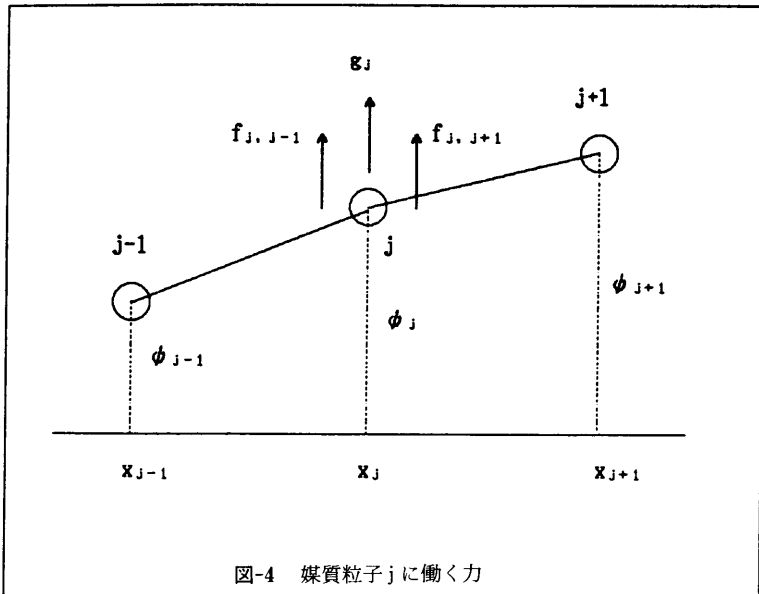


図-4 媒質粒子 j に働く力

$$\omega = 2 \omega_0 \sin(ka/2) \tag{35}$$

ここで ω_0 は媒質に固有な振動数で $\omega_0^2 = T/ma$ で与えられる。また ka の値としては、第一ブリュアンゾーン (Brillouin zone) をとるものとし、 $|ka| \leq \pi$ とおく。この分散関係式(35)から位相速度 v_p は

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \omega_0 a \left[\frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{\left(\frac{ka}{2}\right)} \right] \tag{36}$$

と与えられる。この v_p は $ka \rightarrow 0$ の極限で、連続系媒質の位相速度 c に一致する。式(36)から、離散系媒質内では波長 λ が大きいほど位相速度が大きくなり、上限値は $\omega_0 \cdot a \sim c$ であることがわかる。その上限値が媒質のもつ遮断周波数 $\omega_c = 2 \omega_0$ であることを示している。

2.2 離散系媒質のインピーダンスと

その物理的な意味

連続系のインピーダンスは、前出の式(8)あるいは(9)で定義された。ここでは、その定義と対応する次の式を用いて 離散系媒質のインピーダンス Z を定義する。

$$f_{j,j+1} = -Z \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) \tag{37}$$

この式にある Z を実部 Z_r と虚部の大きさ Z_i で $Z = Z_r + iZ_i$ と表し、式(32)と(34)を用いると 離散系インピーダンスの具体的な形が次のように求まる。

$$Z_r = \left(\frac{T}{\omega a} \right) \sin(ka) = m\omega_0 \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \tag{38}$$

$$\begin{aligned} Z_i &= \left(\frac{T}{\omega a} \right) (1 - \cos(ka)) \\ &= m\omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{1}{2} m\omega \end{aligned} \tag{39}$$

ただし ω については式(35)の分散関係を用いている。よって 離散系での Z は、

$$Z(\omega) = m\omega_0 \exp \left[i \left(\frac{ka}{2} \right) \right] \tag{40}$$

となる。この式を連続系でのインピーダンス Z_0 の式(9)と比べると、両系のインピーダンスの間には 次のような相違点があることがわかる。

- (1) 離散系インピーダンス Z は、波数 k をつうじて振動数 ω に依存する。しかし 連続系インピーダンス Z_0 は、振動数に依存しない。
- (2) 離散系インピーダンス Z は、常に虚数部をもつ複素

数である。しかし 連続系インピーダンス Z_0 は実部のみである。

前節 1.4 で示したように、連続系媒質が抵抗をもてば、振動数への依存性と虚数部の存在があらわれてくる。しかし いまの場合、媒質に抵抗はない。ただ 系を離散化するだけで、このような違いがあらわれてきたことになる。この離散化の影響は $ka \rightarrow 0$ の極限で $Z_i \rightarrow 0$ となって消え、たしかに連続系のインピーダンス Z_0 に一致する。

ここで インピーダンスの物理的な意味を離散系の場合でみてみよう。粒子 $j+1$ がその左にある粒子 j に及ぼす力 $f_{j,j+1}$ は、式(34)と $Z = Z_r + iZ_i$ を用いて、次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} f_{j,j+1} &= -Z \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) \\ &= -Z_r \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) - iZ_i \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) \\ &= -Z_r \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) - iZ_i (-i\omega \psi_j) \\ &= Z_r \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) - \omega Z_i \cdot \psi_j \end{aligned} \tag{41}$$

この式から、 $j+1$ が j に及ぼす $f_{j,j+1}$ が二つに分けられることがわかる。右辺第一項は j の運動に対する抵抗力をあらわし、これにはインピーダンスの実部 Z_r が寄与している。次に第二項は j に対する弾性力をあらわし、これは式(40)の Z_i を用いて書き直すと $-(1/2)m\omega^2 \psi_j$ となり、丁度変位に比例した復元力の半分の大きさになっていることがわかる。これは前節 1.2 のはじめの部分で述べたように、弦のもつインピーダンスの働きを式の形で示している。すなわち 弦の左から進行波がやって来るとき、まだ静止している弦の右側部分 (粒子 $j+1$) は、すでに盛り上がって迫ってくる部分 (粒子 j) に対し、その運動を減じようとする抵抗力 (式(41)の第一項) を加え、さらにこれを元の平衡位置に引き戻そうとする弾性力 (式(41)の第二項) も加える。したがって もし弦が粒子 j のところで切断されていても、 j に対し式(41)で与えられる力 $f_{j,j+1}$ を右側から加えてやれば、あたかも弦がまた右側に続いているかのように j を運動させることができる。次節では、この考えに基づく境界条件を示してみる。

ここで 離散系媒質でのエネルギーの流れをみてみる。前節 1.2 の式(10)で与えられたエネルギーの流れは、離散系の場合

$$P(j, j+1; t) = -f_{j,j+1} \cdot \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) = Z \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 \tag{42}$$

とあらわせる。ここで $P(j, j+1; t)$ は、粒子 j から $j+1$ へ

流れていく単位時間当たりのエネルギーである。式(12)と同様に時間平均 $\langle P(j, j+1) \rangle$ をとって、正味のエネルギーの流れを求めると、

$$\begin{aligned} \langle P(j, j+1) \rangle &= (1/2) R \cdot P \cdot \left[Z \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} Z_r \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right|^2 \end{aligned} \tag{43}$$

$$= m \omega_0^3 \cos \left(\frac{ka}{2} \right) \sin(ka) \tag{44}$$

となり、連続系の場合と同じくインピーダンスの実部 Z_r だけが正味のエネルギーの流れに寄与している。しかし式(41)を(42)に入れると、エネルギーの流れの式にインピーダンスの虚部 Z_i が $\omega Z_i \psi_i (\partial \psi_j / \partial t)$ の形で現れる。これは Z_i が時々刻々のエネルギーの流れに関与していることを示している。しかしその正味として、粒子の変位と速度の積の時間平均をとると、これは $\langle \psi_j (\partial \psi_j / \partial t) \rangle = 0$ となる。したがって弦の弾性エネルギーの部分は、正味のエネルギーの流れに寄与せず、ただ弦の抵抗力を反映する Z_r の部分だけが寄与していることになる。ただしこの抵抗は前節 1.4 で現れた損失性の抵抗 β と違い、非損失なものである。

また式(44)が示すように、離散系の媒質内では、連続性の場合と違ってエネルギーの流れが波数 k に依存し、 $|ka| = \pi$ の時には正味のエネルギーの流れがなくなる。この状況は、分散関係式(35)からわかるように、進行波が丁度遮断周波数で媒質へ進入している状態に対応し、波が伝播していけないことを示している。実際、式(15)に対応するエネルギーの伝播速度 v_e を離散系の場合で求めてみると、

$$v_e = ma \cos \left(\frac{ka}{2} \right) \tag{45}$$

となり、 $|ka| = \pi$ の時にはエネルギーの伝播速度 $v_e = 0$ となっている。

2.3 透過境界条件

離散系インピーダンス Z のもつ働きについては、式(41)の説明で具体的に述べてみた。もしこのインピーダンスの働きを端のある弦に適用すれば、実際には弦が $x = L = N \cdot a$ で切れているにもかかわらず、あたかも弦が端から無限に続いているかのように運動させることができる。したがって媒質の特性インピーダンスを用い、境界から反射波を発生させることなく波を透過させる、透過境界条件の設定が可能となる。

いま 1.2 節で述べたと同じ離散系の媒質モデル、および同じ波動伝播の状況を考える。すなわち質量 m の粒子が一定間隔 a で結ばれる長さ L の弦を考え、左端にある粒子番号 0 の粒子に外力が加わって波が発生し、これが順次右の粒子に伝播していき、粒子番号 N の境界粒子に達する状況を考えよう。この状況を図-5 に示す。このとき境界の粒子 N を、まだその右に弦が続いているかのように運動させるには、弦のインピーダンス Z を用いた力を粒子 N の右側から作用させればよい。すると境界粒子 N の運動方程式は、次のようになる。

$$m \left(\frac{\partial^2 \psi_N}{\partial t^2} \right) = f_{N, N-1} - Z \left(\frac{\partial \psi_N}{\partial t} \right) \tag{46}$$

ここで $f_{N, N-1}$ は、粒子 $N-1$ が N に及ぼす力である。また $-Z(\partial \psi_N / \partial t)$ は、粒子の N の右側に弦がさらに続いている状態を、 N の運動に反映する力である。もし実際に、弦が粒子 $N, N+1, N+2, \dots$ と続いていれば、この力は $N+1$ が N に及ぼす力 $f_{N, N+1}$ となる。

したがって反射波を発生させず波を境界から透過させる透過境界条件とは、境界粒子 N に対し力 $f_{N, N+1}$ の代わりに、インピーダンス Z を用いて作られる力 $-Z \cdot$

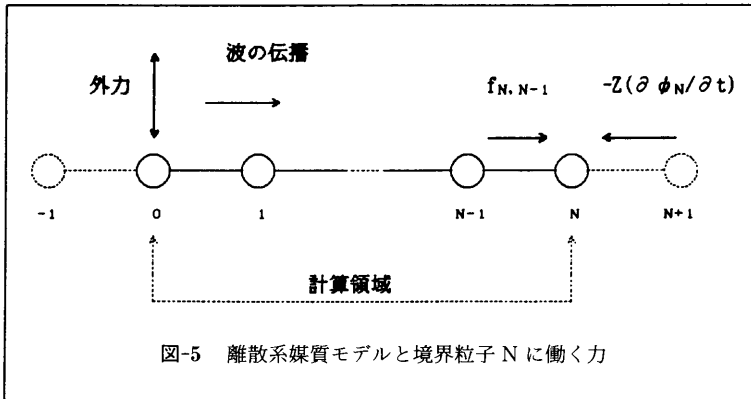


図-5 離散系媒質モデルと境界粒子 N に働く力

$(\partial\psi_n/\partial t)$ を単に右側から作用させることに等しい。こうして 式の式(46)が、透過境界条件を反映した境界粒子の運動方程式になる。

3. 透過境界条件を用いた

波動伝播のシミュレーション

ここでは 離散系媒質モデルの波動伝播方程式(33)と(46)に対し、時間についての差分化をおこない、この差分方程式系でのシミュレーション結果を示してみる。そして 郎境界粒子の変位とエネルギー伝播の様子から、波動伝播における透過境界条件の有効性を検証してみる。

3.1 波動伝播の差分方程式

前節 2.3 の図-5 で定義した離散系媒質モデルの場合、その波動伝播方程式は

$$\frac{\partial^2 \psi_o}{\partial t^2} = 2 \omega_o^2 (\psi_1 - \psi_o) + \frac{1}{m} \cdot g_o \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} = \omega_o^2 (\psi_{j-1} - 2 \psi_j + \psi_{j+1}) \quad \text{for } j=1 \sim N \quad (48)$$

ただし境界粒子 N では

$$f_{N,N+1} \sim T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_N = -Z \left(\frac{\partial \psi_N}{\partial t} \right) \quad (49)$$

とまとめられる。これを次のように差分化する。まず時刻 $t_n = n\delta t$ での粒子 j の変化を $\psi_j(t_n) = \psi_j^n$ と簡潔に表記し、変位の時間微分である速度 $V_j = \partial\psi_j/\partial t$ を次のように中心差分で定義する。

$$\frac{(\psi_j^{n+1} - \psi_j^n)}{\delta t} = V_j^{n+1/2} \quad (50)$$

ここで右辺の $V_j^{n+1/2}$ は、粒子 j が時刻 $t_n + \delta t/2$ においてもつ速度をあらわす。この定義から、上の式の左辺にある二次微分は、次のような速度の差分で表される。

$$\left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \right) \text{ at } t_n \sim \frac{(V_j^{n+1/2} - V_j^{n-1/2})}{\delta t}$$

また 境界における透過境界条件の式(49)を、次のように差分化する。

$$\begin{aligned} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_N &\sim \left(\frac{T}{2a} \right) (\psi_{N+1}^n - \psi_{N-1}^n) \\ &= -Z \frac{(V_N^{n+1/2} + V_N^{n-1/2})}{2} \end{aligned}$$

差分化による両辺の近似誤差は、それぞれ $\delta x (=a)$ と δt につき、ともに二次以上のオーダーとなっている。こうして 計算領域境界で透過境界条件を適用した波動伝播の差分方程式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} V_o^{n+1/2} &= V_o^{n-1/2} + 2 \omega_o^2 \delta t (\psi_1^n - \psi_o^n) + \left(\frac{\delta t}{m} \right) \cdot g_o^n \\ V_j^{n+1/2} &= V_j^{n-1/2} + \omega_o^2 \delta t (\psi_{j-1}^n - 2 \psi_j^n + \psi_{j+1}^n) \\ &\quad \text{for } j=1 \sim N-1 \\ V_N^{n+1/2} &= V_N^{n-1/2} + 2 \omega_o^2 \delta t (\psi_{N-1}^n - \psi_N^n) \\ &\quad - \frac{aZ}{T} \omega_o^2 \delta t (V_N^{n+1/2} + V_N^{n-1/2}) \\ \psi_j^{n+1} &= \psi_j^n + V_j^{n+1/2} \delta t \quad \text{for } j=0 \sim N \end{aligned}$$

この式に基づいて実際に計算をおこなうには、方程式を無次元化しておくのがよい。そこで、両辺を $(a/\delta t)$ で割り、無次元化された変位、速度、外力をそれぞれ ϕ_j^n , v_j^n , f_o^n とおき、さらに $\omega_o \delta t = r$ とおけば、実際に計算を遂行する差分方程式は 次のようになる。ただし Z には式(40)を用いている。

$$v_o^{n+1/2} = v_o^{n-1/2} + 2 r^2 (\phi_1^n - \phi_o^n) + r^2 f_o^n \quad (51)$$

$$v_j^{n+1/2} = v_j^{n-1/2} + r^2 (\phi_{j-1}^n - 2 \phi_j^n + \phi_{j+1}^n) \quad \text{for } j=1 \sim N-1 \quad (52)$$

$$\begin{aligned} v_N^{n+1/2} &= \left[\frac{1 - r \cdot e^{i(ka/2)}}{1 + r \cdot e^{i(ka/2)}} \right] v_N^{n-1/2} \\ &\quad + \left[\frac{2 r^2}{1 + r \cdot e^{i(ka/2)}} \right] (\phi_{N-1}^n - \phi_N^n) \quad (53) \end{aligned}$$

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + v_j^{n+1/2} \quad \text{for } j=0 \sim N \quad (54)$$

ここで 境界粒子 N の式(53)では、その実数部について計算をおこなう。

なお 波の源である粒子 $j=0$ の初期条件として、一般に変位の初期値 ϕ_o^0 、速度の初期値 v_o^0 が与えられる。速度 $v_o^{1/2}$ を求める際、 $v_o^{-1/2}$ の値が必要になるが、これは $v_o^0 = (v_o^{1/2} + v_o^{-1/2})/2$ と式(51)で $n=0$ とおいた式を用い

$$v_o^{-1/2} = v_o^0 - r^2 (\phi_1^0 - \phi_o^0) - \left(\frac{r^2}{2} \right) f_o^0 \quad (55)$$

と求められる。なお、以下に示す計算では 源以外の粒子に対し $\phi_j^0 = 0$, $v_j^0 = 0$ の初期条件を与える。このため、源以外のすべての粒子について $v_j^{-1/2} = 0 (j=1 \sim N)$ となる。また 式(53)にある $e^{i(ka/2)}$ については、式(35)の分散関係をもちいて

$$\begin{aligned} e^{i(ka/2)} &= \cos \left(\frac{ka}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \\ &= \left[1 - \left(\frac{\omega}{2\omega_o} \right)^2 \right]^{1/2} + i \cdot \left(\frac{\omega}{2\omega_o} \right) \\ &= \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right]^{1/2} + i \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \end{aligned}$$

と書き直す。この実部と虚部の値は、伝播させる波の振動数 ω と媒質のもつ遮断周波数 $\omega_c (=2 \omega_o)$ との比 $(\omega/$

ω_0) を入力で与えておけば計算できる。

こうして有限な計算領域で一方向に進む波の伝播シミュレーションを行うには、上述の式(51)から(55)までを用いればよいことがわかる。なお 計算にあたり、差分の近似精度と計算の安定性の両面から、時間の刻み幅 δt が次の条件

$$r = \omega_0 \delta t \ll 1 \quad (56)$$

を満たすことが必要になる。この r は、 δt の間に変化する位相の大きさをラジアン単位で表したものであり、また 次のように書き直せば

$$r = \left[\frac{\omega}{2 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)} \right] \delta t \sim \left(\frac{\omega}{k} \right) \frac{\delta t}{a} \\ = v_p \delta t / a \ll 1 \quad (57)$$

となる。これは、 δt 時間での波の進みが メッシュ幅 a を超えないことを示している。

計算の安定条件だけからみれば、式(56)はきつい条件である。ここで差分近似による誤差が時間とともに増幅しない安定性だけに着目し、 $\omega_0 \delta t$ の条件を導いてみる。このために粒子 j の運動方程式(48)の左辺を、次の式の左辺にある差分に置き換る。

$$\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1} = (\omega_0 \delta t)^2 (\phi_{j-1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j+1}^n) \quad (58)$$

これに対し誤差解析をおこなうと、式(56)より緩い 次の条件が導かれる。

$$r = \omega_0 \delta t \leq 1$$

一方、速度を定義した中心差分式(50)に $\phi_j^n \sim \exp[i(ka \cdot j - \omega \delta t \cdot n)]$, $V_j^n \sim (-i\omega) \phi_j^n$ を入れると、 $\omega \delta t$ について次の式がえられる。

$$\omega \delta t = 2 \sin(\omega \delta t / 2) \quad (59)$$

また 運動方程式(50)の ϕ_j^n と V_j^n に上と同様な形の解を入れると、 $\sin(\omega \delta t / 2) = (\omega_0 \delta t) \sin(ka/2)$ という式がえられる。この左辺の ω に分散関係式(35)を用いれば

$$\sin \left[r \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right] = r \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (60)$$

となる。じつは、この式(60)と式(59)は同じ関係式である。これをみるためには、式(59)の ω を分散関係式(35)を用いて書き直せばよい。

したがって 差分近似でえられた方程式(51)から(55)が、正しく物理物象を再現するためには、式(60)が成り立つこ

とが必要となる。しかし $|X| \leq 1$ の範囲で、式(60)の形 $\sin X = X$ を満たす解はない。それゆえ この式は $\sin X$ が近似的に X に等しいという条件 $\sin X \sim X$ とみる必要がある。この見方に立ち 式(60)が近似的に成立するには

$$r \sin(ka/2) \ll 1 \quad (61)$$

という条件が必要となる。波数 k の大きさは入射波によって決まる物理的なもので、またメッシュ幅 a の大きさは、式(57)からもわかるように δt に依存する量である。したがって a の大小は δt と独立に操作できない。よって

上の条件(61)を成立させる唯一操作可能なものは、 r に含まれる δt のみである。それゆえ 計算の安定性に加え、差分近似の精度も考慮した条件として $r \sin(ka/2) < r = \omega_0 \delta t \ll 1$ が得られることになる。これは 安定性だけから導かれる条件 $r = \omega_0 \delta t \leq 1$ よりもきついものである。

このように r は 1 より小さい必要があるが、その大きさの上限は式(60)を用いて試算できる。いま 式(60)の $r \sin(ka/2)$ を X とし、 ϵ を 1 より小さな値とおく。次いで $X - \sin X$ が X の ϵ 倍以下になるという条件 $X - \sin X \leq \epsilon X$ を近似的に解くと、 $X \leq (6\epsilon)^{1/2}$ を得る。いま ϵ として 10^{-2} をとれば $X \leq 0.244$ と、式(60)の上限が 1/4 程度と求まる。

3.2 波動伝播シミュレーションの結果と検討

透過境界条件をもちいた計算結果を、粒子の変位、および エネルギーの流れの両面から示してみる。計算に際しては、 $\sin(\omega t)$ で振動する力を 波を発生させる外力として左端の粒子 0 に加える。外力の振動数 ω には、媒質の遮断周波数 ω_c の 1/8、すなわち $\omega/\omega_c = 0.25$ を用い、計算の時間間隔 δt として r が $r = \omega_0 \delta t = 2\pi/40 \sim 0.16$ の大きさになる値を用いる。また 計算領域に含まれる媒質粒子の数 N として、パルスを伝播させて境界を含む粒子全体の変位をみる場合は $N = 60$ 、境界粒子の変位だけに着目する場合は、 $N = 20$ とする。変位の図には、計算結果およびこれに対応する解析解も併せて示し、一目で透過境界アルゴリズムの有効性がわかるようにしてみる。

3.2.1 パルスの伝播：図-6a～図-6h

源の粒子に、ある有限な時間 T_d だけ外力が働くと、その影響はパルスとなって伝播していく。図-6a から図-6h までは、このシミュレーション結果である。図の横軸は計算領域の全域をあらわし、小さな丸印は媒質粒子を表している。左端は源の粒子、右端は領域境界の粒子で、10 粒子ごとの位置を縦の点線で示している。

図の上半分では、パルスの伝播で生じる粒子全体の変

位を示す。計算結果を実線と丸印で、対応する解析解を点線で示しているが、この二つの線が波の先端と後端を除きほとんど重なっているため、解析解の様相がわかりにくくなっている。このため図の下半分では、解析解と計算結果との差を、変位と同じスケールで表示してみた。

計算結果の図は、左端の粒子にのみ外力をその周期に相当する時間だけ加えてパルスが発生させ、このパルスが時間とともに右へ進んで行き、境界に達しても変形を受けずそのまま透過していく様子を示している。外力の振動数 ω と弦固有の振動数 ω_0 との比は $\omega/\omega_0=1/4$ であるから、 ω_0 に対する周期 T_0 を基準に用いると、外力の周期とその駆動時間はともに $4 T_0$ となる。

図-6a は、外力の駆動が終了した時刻 $t=4 T_0$ での媒質粒子全体の変位を示している。パルスの先端は 25 番目の粒子付近にあり、これは解析解ともほぼ一致している。実際 T_0 時間にパルスが進む距離の理論値は、分散関係式(35)を用いて計算できる。これをメッシュ数であらわすと

$$\begin{aligned} \frac{v_p \cdot T_0}{a} &= \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \pi \left[\sin^{-1} \frac{\omega}{2 \omega_0} \right] \\ &= \frac{\pi}{4 \sin^{-1} \left(\frac{1}{8} \right)} \sim 6.27 \end{aligned}$$

となり、 $4 T_0$ 時間でパルスの先端は約 25.1 メッシュだけ進むことがわかる。また 図からパルスの幅は約 25 メッシュの幅 ($=a$) と読み取れるが、これも分散関係式(35)から求める理論値

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{\pi}{\left[\sin^{-1} \left(\frac{\omega}{2 \omega_0} \right) \right]} = \frac{\pi}{\sin^{-1} \left(\frac{1}{8} \right)} \sim 25.07$$

と一致している。図-6b は、さらに時間が $4 T_0$ だけ経た時刻 $t=8 T_0$ での状況である。パルスの先端と後端部分で僅かに差がみられるほかは、よく一致していることがわかる。

図-6c~6f までは、パルスが境界を通過していく様子を T_0 ごとに示してある。波の後端近くで解析解との差が僅かにあるが、ほとんど反射も変形もなく透過していく様子が得られている。計算結果にあるこのパルス後端の振動部分は、計算誤差ではなく、むしろパルスの後端で小さい振動の尾を引く一次元波動の物理的特徴が再現されている。

図-6g, 6h は、パルスが境界を通過したあとの媒質の状況を示している。もし境界を通過する際に反射波が生じていれば、逆に伝播する波が現れるはずである。しかし計算結果の図-6h にあるように、すべての粒子が静止の

状態にあり 反射波は皆無である。

3.2.2 源の粒子 ($j=0$) と境界粒子 ($j=N$) の変位

: 図-7a, 7b

図-6 では、いくつかの時刻について粒子の全体の変位を示してみた。ここでは粒子を源の粒子 ($j=0$) と境界粒子 ($j=N$) に限り、その変位を各計算時刻 δt 毎に詳しく示してみる。また 図-6 と同様に、解析解および解析解と計算結果の差も示す。ここで示すシミュレーションの物理状況は、次のようなものである。すなわち 媒質の左端の粒子に振動数 ω の力に加え、これだけを強制的に振動させると、この粒子を源とした振動数 ω の波が発生する。この発生した波は、媒質内の粒子を次々に震わせながら右側へ進み、境界に達した後は 境界粒子を源と同じ振動数 ω で振動させる。図-7 では、こうして生じる粒子 0 と N の変位の時間変化を示したものである。ここでは、シミュレーション時間と外力の駆動時間を同じ $20 T_0$ としている。

図-7a は 外力のもとで振動している源の粒子の変位 $\phi_0(t)$ を、図-7b は 計算領域の境界にある粒子の変化 $\phi_N(t)$ を示している。図-6 の場合と同様に、図の上半分では各時刻での計算結果を実線で、また対応する解析解を点線で示している。図-6 の場合と同じく、二つの線がほとんど重なって見えにくいので、図の下半分では解析解と計算結果との差を 変位と同一のスケールで表示してある。

この二つの図からわかるように、波の先端は約 $3 T_0$ 時間後に境界粒子に到達し、そのご、境界粒子は源の粒子と同じように振動している。この、境界粒子の変位の大きさと位相は、解析解とほとんど一致している。このことは、各時刻においても境界粒子があたかもまだ右側に弦が続いているかのように運動し、入射波が反射波を生じさせることなく境界を通過していることを示している。

3.2.3 境界でのエネルギーの流れ: 図-8

もし 波が完全に境界を透過していくなら、波のエネルギーも境界を完全に透過するはずである。すなわち粒子 $N-1$ から N に流れ込むエネルギーと等しい量が、粒子 N から $N+1$ へ流れ出ていくはずである。したがって 境界での反射波の有無を、境界の左にある粒子 $N-1$ から境界粒子へのエネルギーの流れ (パワー) $P(N-1, N; t)$ と、境界粒子からさらに右へ流出するエネルギーの流れ $P(N, N+1; t)$ の比で確かめることができる。

いま 時刻 t_n から $t_n + \delta t$ の δt 時間の間に、境界粒子 N に入出入りするエネルギー量 E を次のように差分化して

みる。

$$\begin{aligned}
 E(N-1, N; t_n) &= P(N-1, N; t_{n+1/2}) \cdot \delta t \\
 &= - \left[f_{N-1, N} \left(\frac{\partial \phi_N}{\partial t} \right) \right]_{t_{n+1/2}} \cdot \delta t \\
 &\sim \left(\frac{T}{a} \right) (\phi_{N-1}^{n+1/2} - \phi_N^{n+1/2}) \cdot V_N^{n+1/2} \cdot \delta t \\
 E(N, N+1; t_n) &= P(N, N+1; t_{n+1/2}) \cdot \delta t \\
 &= - \left[f_{N, N+1} \left(\frac{\partial \phi_N}{\partial t} \right) \right]_{t_{n+1/2}} \cdot \delta t \\
 &= Z \left[\left(\frac{\partial \phi_N}{\partial t} \right)^2 \right]_{t_{n+1/2}} \cdot \delta t \\
 &\sim Z \cdot (V_N^{n+1/2})^2 \cdot \delta t
 \end{aligned}$$

ここで 変位 $\phi_j^{n+1/2}$ は、時刻 $t_n \sim t_n + \delta t$ の間の平均変位、すなわち ϕ_j^n と ϕ_j^{n+1} の和の $1/2$ とする。この E を $m(a/\delta t)^2$ で割って無次元化し、これを e とおくと

$$\begin{aligned}
 e(N-1, N; t_n) &= r^2 [\phi_{N-1}^{n+1/2} - \phi_N^{n+1/2}] \cdot V_N^{n+1/2} \\
 e(N, N+1; t_n) &= r \cdot \cos \left(\frac{ka}{2} \right) \cdot (V_N^{n+1/2})^2
 \end{aligned}$$

となる。計算のタイムステップ毎にこの値 e を足し上げ

ていき、ある時刻 t までに流入・流出する総エネルギー量 $se(N-1, N; t)$, $se(N, N+1; t)$ を求め、これから作られる比 $R_E = se(N, N+1; t_n) / se(N-1, N; t_n)$ を、境界でのエネルギー透過率とする。

図-8は、3.2.2と同じ状況のもとでの境界におけるエネルギー透過の様子を示したものである。横軸は時間、縦の点線で T_0 時間ごとの経過を示し、エネルギー透過率 R_E を各計算時刻 δt ごとに示してある。また最上部の破線は、透過率が1.0の線であり、その下の粗い点線は0.95の透過率を示す。透過率は波の先端が境界に到達する時刻 $3T_0$ のあたりから大きく立上り、波の最大振幅である山が境界に達した時点で1.0となる。以後、透過率は0.95~1.0の間を振動する。そして経過時間が大きくなるとともに、その振幅を狭め入射波の山と谷が境界に到達するつど透過率が1.0となる。(この山と谷の位置関係は、すぐ上の図-7bで示される。)このことは境界エネルギー流出入のつじつまが、入射波の半周期ごとの総和でみれば正しく合っていることを示している。

図-6a-6hでは、弦を伝播するパルスの様子を時間を追って示している。 T_0 は弦の固有振動数 ω_0 に対応する周期である。
 図の上部分では 縦軸が変位、横軸が粒子位置で、実線は計算解、点線は解析解を示している。変位の最大値は4.0である。
 図の下部分は、縦軸が解析解と計算解との差で、横軸は同じく粒子位置を示す。二つの解の差は点線で示されている。

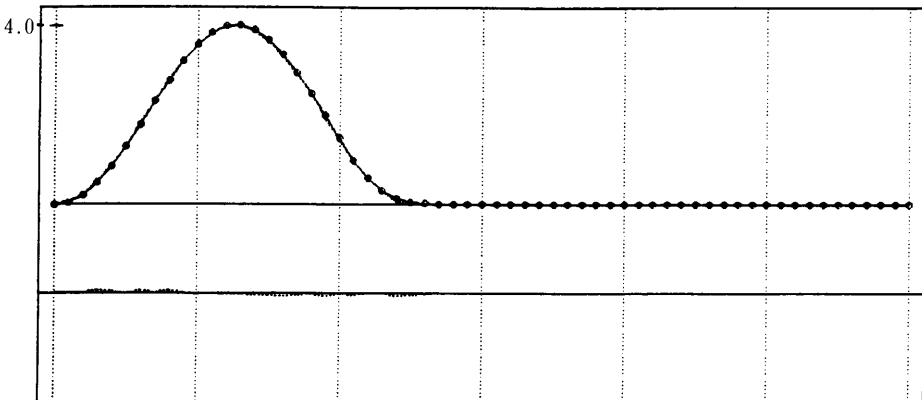


図-6a パルスの伝播 ($t = 4T_0$)

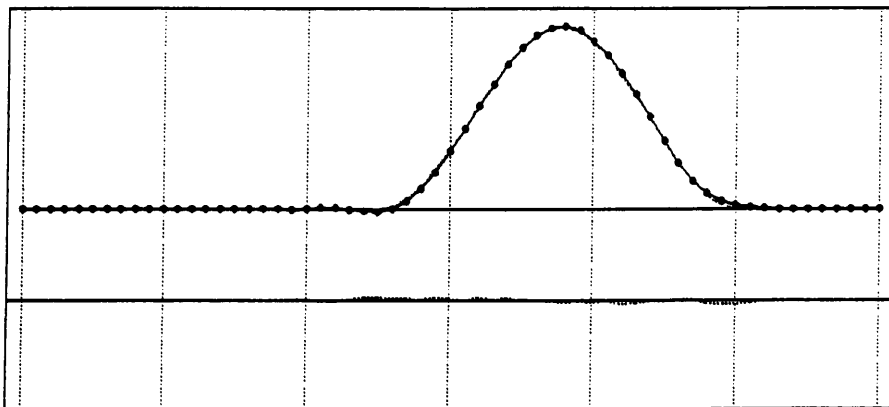


図-6b パルスの伝播 ($t=8 T_0$)

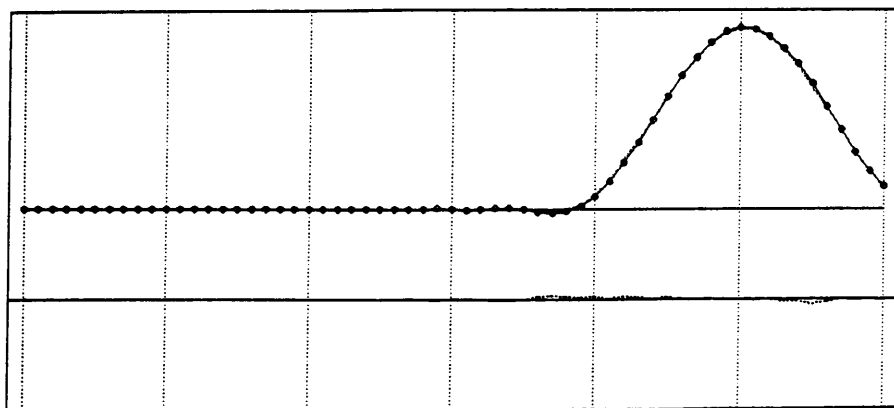


図-6c パルスの伝播 ($t=10 T_0$)

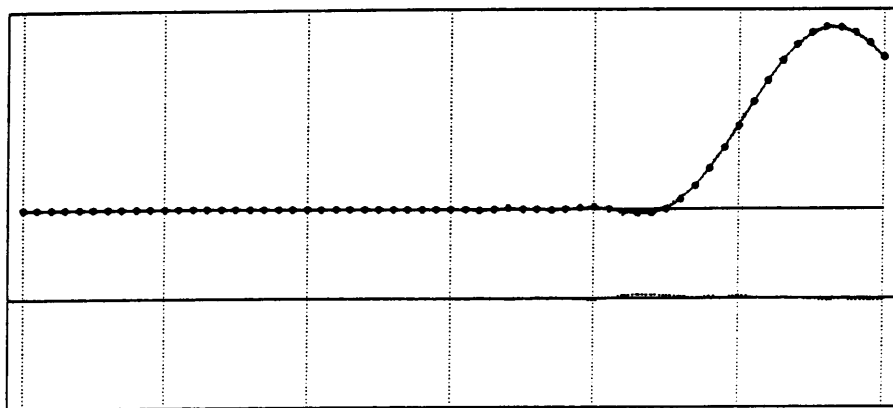


図-6d パルスの伝播 ($t=11 T_0$)

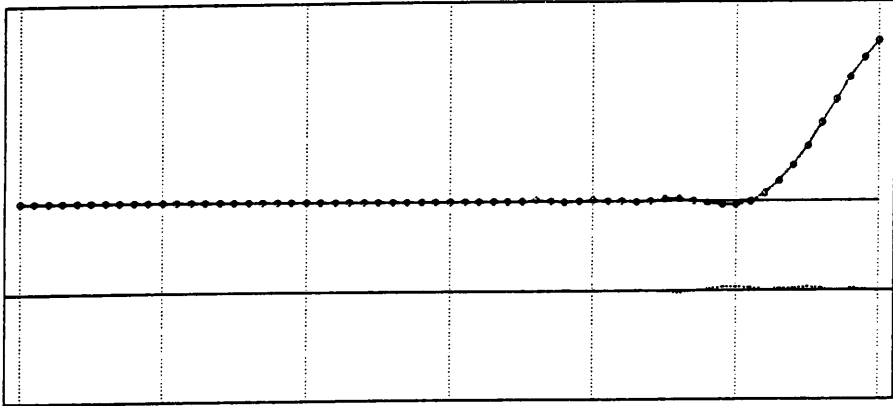


図-6e パルスの伝播 ($t = 12 T_0$)

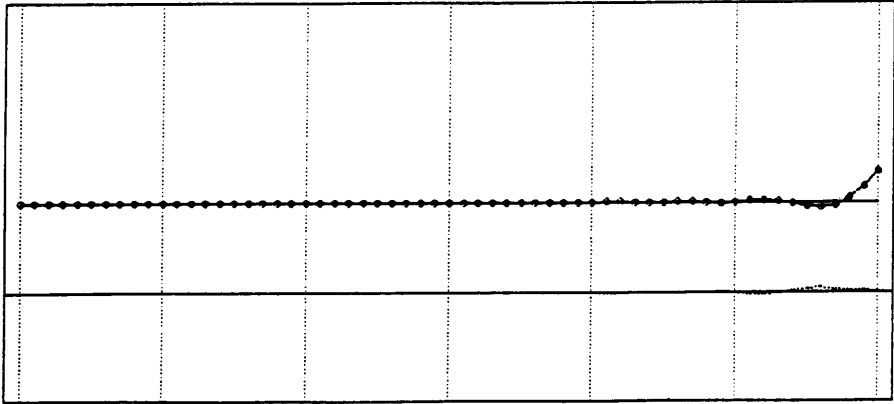


図-6f パルスの伝播 ($t = 13 T_0$)

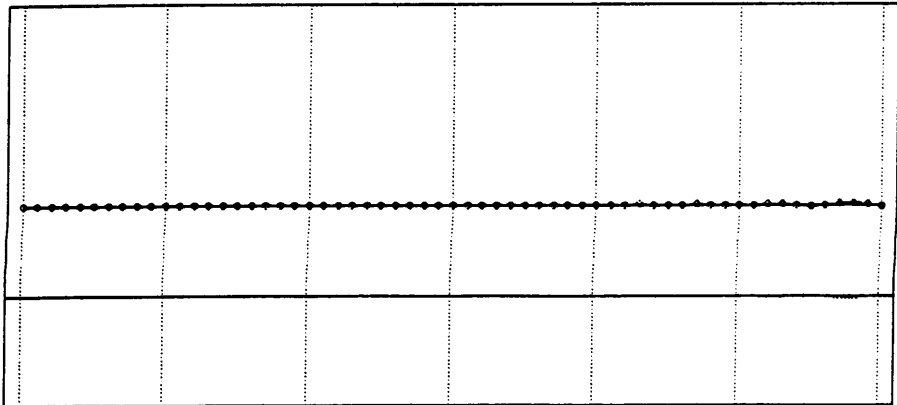


図-6g パルスの伝播 ($t = 14 T_0$)

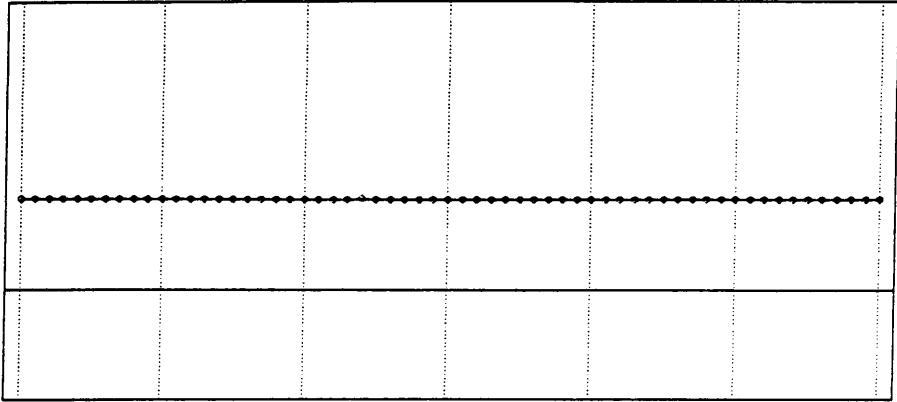


図-6h パルスの伝播 ($t=16 T_0$)

図-7a は $\sin \omega$ に比例する外力が働いている源の粒子の変位を, 図-7b では源から伝播してきた波による境界粒子の変位を, 時間を追って示している。
 図の上部分では, 縦軸が変位, 横軸が経過時間。実線は計算解, 点線は解析解を示している。変位の最大値は 4.0 である。図では経過時間 T_0 ごとに縦の点線を描いている。 T_0 は弦の固有振動数 ω_0 に対応する周期である。
 図の下部分では, 縦軸が解析解と計算解の誤差で, 横軸は同じく経過時間。
 二つの解の差は点線で示されている。

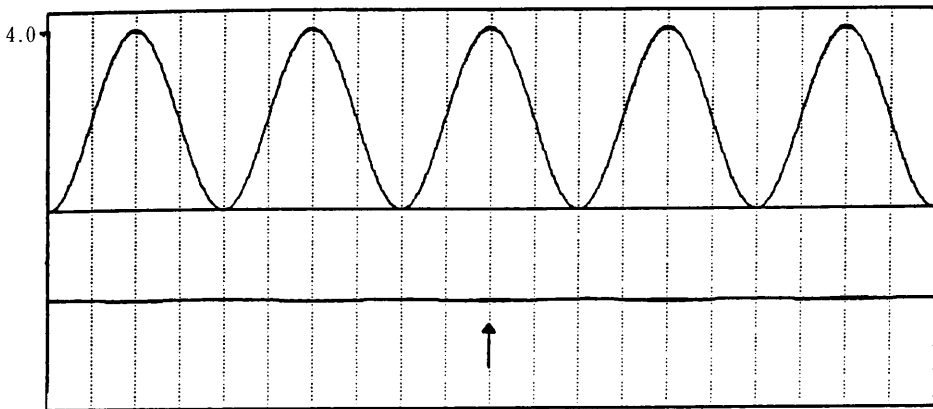


図-7a 源の粒子 ($j=0$) の変位 $\phi_0(t)$

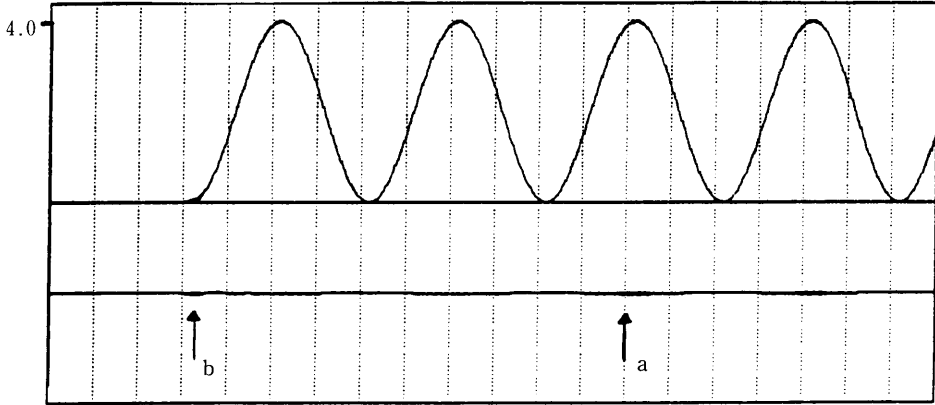


図-7b 境界粒子 ($j=N$) の変位 $\phi_N(t)$

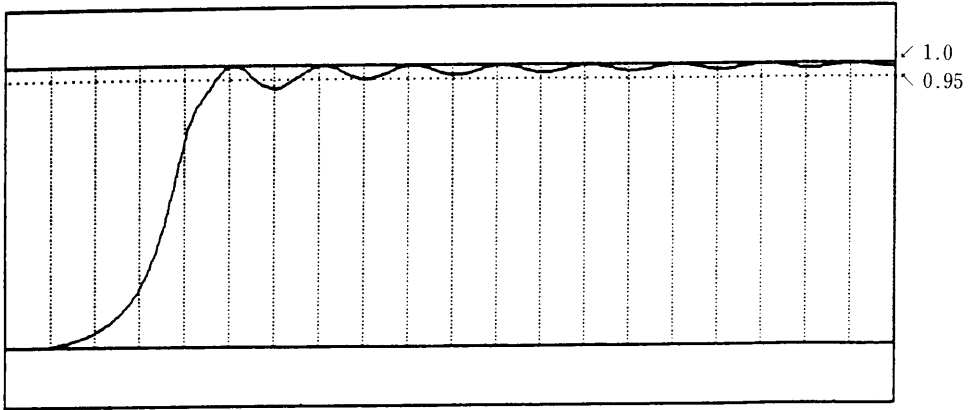


図-8 境界でのエネルギー透過率

図-8 は境界粒子のエネルギー透過率を時間を追って示している。縦軸は透過率、横軸が経過時間で、求められた透過率を実線で示す。経過時間 T_0 ごとに縦の点線を描いてある。 T_0 は弦の固有振動数 ω_0 に対応する周期である。

3.3 シミュレーション結果の精度

—解析解との比較—

前節 3.2.1~3.2.2 の図では、解析解およびこれと計算解の差を点線で表示してみた。ここでは計算解と解析解を定量的に比較し、透過境界条件アルゴリズムがもつ精度を検討してみる。そのために、まず必要となる解析解を求める。次いで 計算解と解析解との双方の差が、アルゴリズムの是非に起因するものなのか、または数値計算に伴う誤差によるものなのかをみる。

3.3.1 シミュレーション系の解析解

時間的に変化する外力 $f(x, t)$ が弦に働いている時、波

動方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -f(x, t) \tag{62}$$

となる。ここで右辺の $f(x, t)$ は、時刻 t に弦の位置 x に作用する単位長さ当たりの外力 $F(x, t)$ を弦の張力 T で割った F/T で、その次元は(長さ)⁻¹である。この方程式の解 $\psi(x, t)$ は、次の式を満たす Green 関数 $g(x, t; x', t')$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\delta(x-x')\delta(t-t') \tag{63}$$

と Green の定理を用いて、次のように与えられる。

$$\psi(x, t) = \int_0^t \int_v dx' g(x, t; x', t') f(x', t') \tag{64}$$

ただし弦は無限に広がっており、 x' の積分範囲 v は $-\infty \sim +\infty$ である。また Green の定理を用いる際、時刻 $t=0$ での初期の変位と速度はゼロとし、

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) = 0, \quad g(x, t; x', 0) = 0 \\ \partial\phi(x, 0)/\partial t = 0, \quad \partial g(x, t; x', 0)/\partial t = 0 \end{aligned}$$

としている。この Green 関数 $g(x, t; x', t')$ は、時刻 t' に位置 x' へ単位の大さきの衝撃力を加えた時、それより後の時刻 t で位置 x にどれほどの応答が生じるか、その因果関係を与える関数である。したがって Green 関数 g は、衝撃以前に応答はないから

$$g(x, t; x', t') = 0 \quad \text{for } t < t' \tag{65}$$

となる。式(64)で t' の積分上限が $+\infty$ でなく t であるのは、このためである。

Green 関数 $g(x, t; x', t')$ を求めるには、 g とデルタ関数 δ の双方を Fourier 積分であらわし、これと式(63)を用い複素積分を実施すればよい。その際、式(65)の因果律を満たすように積分経路を選ぶと、次の結果を与える。

$$g(x, t; x', t') = (1/2)c \cdot \theta \left[(t-t') - \frac{|x-x'|}{c} \right] \tag{66}$$

この Green 関数 g は速度の次元をもち、これは式(64)からも確かめられる。なお 式(66)にあらわれる関数 θ は単位段階関数で、次のように定義される。

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ixt}}{x-i\epsilon} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

式(66)は 時刻 t' 位置 x' に単位の大さきの衝撃を与えると、その応答である強さ $1/2$ の乱れが位置 x' から左右へ先端速度 c で伝播して行くことを意味している。ただし応答が衝撃パルス形で球面状に広がっていく三次元の場合と違い、一次元のときにはこの応答が $|x-x'| \leq c(t-t')$ の範囲全体に広がっている。

ここで系が 3.2.2 の状況にある時の変位の解析解 $\Psi(x, t)$ を求め、これを計算解と比較してみる。この場合、外力は $f(x, t) = f_0 \delta(x) \theta(t) \exp(i\omega t)$ とおける。この外力 f と式(66)の Green 関数 g を式(34)に入れ、積分を実行すると

$$\Psi(x, t) = i \frac{cf_0}{2\omega} \left\{ 1 - \exp \left[i\omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right] \right\} \tag{67}$$

が得られる。ここで、外力 f にあるデルタ関数 $\delta(x)$ は(長さ) $^{-1}$ の次元をもつから、外力の振幅 f_0 は無次元である。3.2.2 では、外力が $\sin \omega t$ に比例する f の $I.P.$ (虚数部)で与えられているから、求める変位は式(67)の $I.P.$ で与えられ

$$\Psi(x, t) = \frac{cf_0}{2\omega} \left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right] \tag{68}$$

となる。これが前節 3.2.2 の系に対する変位の解析解となる。

式(68)を計算解 ϕ_j^n と比較するには、時間を δt 、空間を $\delta x = a$ に刻み、 $t_n = n \cdot \delta t$ 、 $x_j = j \cdot a$ での Ψ_j^n を求め、これを計算解と同じように a で無次元化した Φ_j^n を用いる。こうして計算解 ϕ_j^n と比べる解析解 Φ_j^n は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_j^n &= \frac{\Psi_j^n}{a} \\ &= \frac{1}{2} c_p f_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \\ &\quad \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\omega}{\omega_0} \cdot r \cdot \left(n - \frac{|j|}{c_p} \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{69}$$

ここで c_p は式(36)の v_p を $(a/\delta t)$ で無次元化した位相速度で、 $r = [\sin(ka \cdot 2)/(ka/2)]$ となる。3.2.2 の計算では、式(69)に現れる各記号は次のような値をもつ。

$$\begin{aligned} c_p \sim 0.157, \quad f_0 = 1.0, \quad r = \frac{2\pi}{40} \sim 0.157, \\ \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{70}$$

これを式(69)に入れると、変位 Φ_j^n は振幅 2.0 をもって 0~4.0 の間の振動し、変位の最大値として 4.0 が得られることがわかる。

3.3.2 解析解との数値比較

ここで解析解 Φ_j^n を 3.2.2 の計算解と比較するため、源の粒子 0 と境界粒子 $N=20$ がもつ計算解 ϕ_j^n と解析解 Φ_j^n との最大差 (の絶対値) ϵ_{\max} を求めてみる。計算では δt を $T_0/40$ とし、シミュレーションを $20 T_0$ の時間に行なっている。したがって計算の総時点数は $20 \cdot 40 = 800$ となり、この中で得られた最大差は表-1 のようになる。

	最大差 ϵ_{\max} ($= \Phi_j^n - \Psi_j^n $)	解析解の値 ($=\Psi_j^n$)	最大差の得られた時点 n
粒子 0	0.0428	3.9892	399 ($t \sim 10 T_0$)
粒子 N	a	0.0377	521 ($t \sim 13 T_0$)
	b	0.0506	131 ($t \sim 3.3 T_0$)

表-1 計算解と解析解の間の変位の最大差

源の粒子 ($j=0$) の最大差 ϵ_{\max} は 0.0428 で、振幅 2.0 に対するこの割合は $0.0428/2 = 2.1\%$ である。また この時の解析解に対する相対誤差は $0.0428/3.9892 = 1.1\%$ と

なる。この最大差の得られた時点は、表の右に掲げており 図-7a ではその位置を矢印で示してある。

一方、境界粒子 ($j=N=20$) については、表にあるように a, b 二つの ϵ_{\max} を示してある。 b の行の値は、図-7b にある b の矢印の位置からわかるとおり、振動初期の過渡状態で得られたもので、これと比較した解析解にはこの過渡状態が含まれていない。したがって誤差を比較するには過渡状態をへた後の時刻で得られる ϵ_{\max} が妥当であり、 a の行の値はこうして $t \geq 4 T_0$ の時刻で得た最大差である。 a の最大差は 0.0377 で、振幅に対するこの割合

は $0.0377/2=1.9\%$ で、相対誤差は $0.0377/3.9315=0.96\%$ となる。また参考までに、 b の場合の最大差は 0.506 で、振幅に対するこの割合は $0.0506/2=2.5\%$ と、ほぼ源の粒子の誤差と同程度となっている。

透過境界条件のアルゴリズムの有効性をみるには、源の粒子よりも、むしろ境界粒子の誤差を指標とすべきである。この観点でみた場合、ここで用いた透過境界条件の精度は、最大でも変位の誤差は 振幅の約 $1/50=2.0\%$ 以内にあり、また相対誤差も 1% 以内にあると言える。

図-9 では境界粒子から流れ出るエネルギー量について、計算解と解析解との比を時間を追って示している。縦軸は二つの解の比、横軸が経過時間で、求められた比率を点線で示す。経過時間 t_0 ごとに縦の点線を描いてある。 T_0 は弦の固有振動数 ω_0 に対応する周期である。

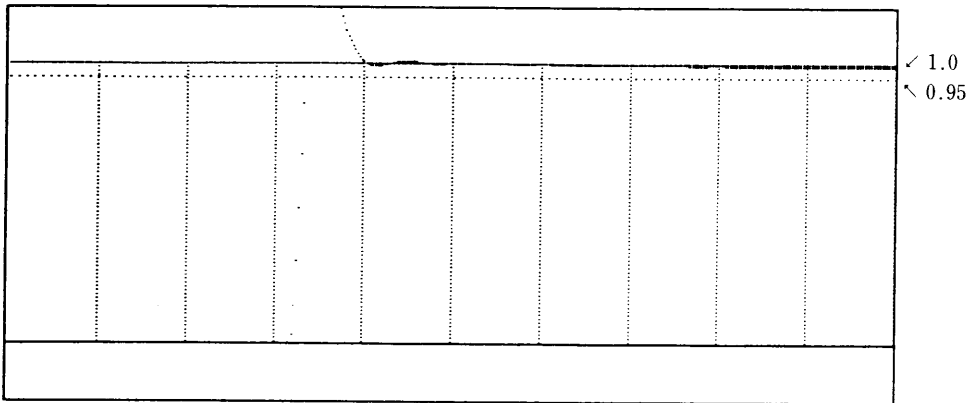


図-9 境界から流出するエネルギー量の計算解と解析解との比

次に 境界でのエネルギーの流れについて、その精度を確かめてみる。境界粒子の位置で解析解がもつ δt 時間のエネルギーの流れ $E_A(x, t)$ は、式(69)を用いて次のようにあらわせる。

$$\begin{aligned} E_A(x=N \cdot a, t) &= P_A(x=N \cdot a, t) \cdot \delta t \\ &= -\left[T \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \cdot \delta t \right]_{x=Na} \\ &= \frac{1}{4} c f_0^2 T \cdot \delta t \cdot \left[\sin^2 \omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right]_{x=Na} \end{aligned}$$

これを $m(a/\delta t)^2$ で無次元化した時刻 $t=t_n$ でのエネルギーの流れを $e_{A,N}^n$ と表すと、

$$e_{A,N}^n = \frac{1}{4} c_p f_0^2 r^2 \sin^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) r \left(n - \frac{N}{c_p} \right) \right] \quad (71)$$

となる。系の状況は 3.2.2 と同じであるから、上の式の値を計算するには(70)で示す値を用いればよい。計算解と比較するには、各時刻で得られる上の $e_{A,N}^n$ を時間 t_n まで足

し上げ、これを t_n までに境界から流出するエネルギー量 $se_{A,N}^n$ として 3.2.3 の $se(N, N+1; t_n)$ と比べればよい。図-9 は、時刻 t_n までに境界から流出するエネルギー量の計算解と解析解との比 $se_n^n/se_{A,N}^n$ を示したものである。求めた比を点線で示し、その他の縦・横の線は図-8と同様である。ただ 一致の状況を拡大表示するため、図-8と違い 横方向の T_0 時間線の間隔が倍になっている。図-9から、波の先端が境界に到達しその後の時刻 $4 T_0$ までを除き、解析解と計算解がほとんど一致していることがわかる。なお、時刻 $10 T_0$ までに境界から流出したエネルギー量は、計算解が 0.12901、解析解が 0.12968 と求められ、その比は 0.9948 となり、解析解と 0.5% しか違わないという高い一致度が得られている。

3.3.3 計算解の理論的な誤差上限

ここで 前節で示した解析解と計算解の変位の最大差

が、果たして誤差の観点から妥当な大きさなものか否かを確かめておく必要がある。そしてもしこの最大差が誤差の観点からとても説明できない大きさなら、この差の原因が、用いた透過境界条件アルゴリズムにあるのか否かを明確にすべきである。したがってここでは波動方程式(3)を取り上げ、まず数値解が理論的にもつであろう誤差の上限値を示してみる。

波動方程式の解析度を Ψ , 対応する計算解を ϕ とおくと、数値計算の誤差 e は

$$\begin{aligned} \text{誤差 } e &= \text{解析解 } \Psi - \text{計算解 } \phi \\ &= [\text{離散化誤差 } \Psi - \psi] + [\text{丸めの誤差 } \psi - \phi] \end{aligned}$$

と、二種類の誤差の和になる。ここで ψ は、波動方程式を離散化して得られる差分方程式を、無限桁の精度で計算した場合に求められる厳密な解である。すなわち離散化誤差とは、連続的な微分方程式を有限な幅をもつ時空間隔 $\delta t, \delta x$ で差分近似するために生じてくる誤差である。一方、丸めの誤差とは、差分近似された方程式をコンピュータが限られた精度の有限桁でしか計算できないために生じてくる誤差である。数値計算の安定性とは、非常に多くの計算の過程で生じる丸め誤差の累積効果についての議論であり、もしこの累積効果が無視できる場合、すなわち多くの計算ステップを経ても丸め誤差が増大しない場合、計算は安定であるという。たとえば前節3.1の最後で述べた $r = \omega_0 \delta t \leq 1$ という条件は、この安定性の条件から導かれたものである。一般に安定性の条件を満たす差分幅を用い、かつ高精度で計算をおこなう場合は丸めの誤差は離散化誤差より小さく、誤差 e の大部分が離散化誤差となる。このシミュレーション計算では式(5)にあるきつ条件を用いており、生じる誤差のほとんどを離散化誤差とみなしてよい。したがって

計算解がもつ誤差を評価するには、まえもって離散化誤差の理論的な上限値を求めておく必要がある。

時刻 $t_n = n \cdot \delta t$, 位置 $x_j = j \cdot \delta x = j \cdot a$ での解析解を Ψ_j^n , 差分解を ψ_j^n とおくと、その離散化誤差 e_j^n は、

$$e_j^n = \Psi_j^n - \psi_j^n$$

となる。これを波動方程式の差分式(5)に入れると、誤差 e_j^n は次の式を満たす。

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= -e_j^{n-1} + r^2 e_{j-1}^n + 2(1-r^2) e_j^n + r^2 e_{j+1}^n \\ &\quad + (\Psi_j^{n-1} - 2\Psi_j^n + \Psi_j^{n+1}) \\ &\quad - r^2 (\Psi_{j-1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j+1}^n) \end{aligned}$$

ここで括弧の中の Ψ を $t = t_n = n \cdot \delta t$, $x = x_j = j \cdot a$ の周りでテイラー展開し、 δt と δx の4次までをとると、誤差は

次のように近似できる。

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= -e_j^{n-1} + r^2 e_{j-1}^n + 2(1-r^2) e_j^n + r^2 e_{j+1}^n \\ &\quad + (\delta t)^2 \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]_j^n \\ &\quad + \frac{2}{4!} (\delta t)^4 \left[\frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} - r^2 \left(\frac{a}{\delta t} \right)^4 \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right]_j^n \end{aligned} \quad (72)$$

上式の二行目にある括弧の項は、 Ψ が波動方程式を満たしているためゼロとなる。ただし位相速度 c については、 $c \sim \omega_0 a$ と近似している。この式の最後の項で、 Ψ としてすでに得られた解析解(6)を用いると、この項は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\text{式(72)の最後の項} \\ &= -\frac{1}{12} \omega^4 (\delta t)^4 \left[1 - r^2 \left(\frac{a}{\delta t} \right)^4 \left(\frac{1}{c} \right)^4 \right] \\ &\quad \cdot \text{Acos} \omega \left(t_n - \frac{|x_j|}{c} \right) \\ &\sim -\frac{1}{12} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 r^4 \left[1 - r^2 \left(\frac{1}{r} \right)^4 \right] \\ &\quad \cdot \text{Acos} \omega \left(t_n - \frac{|x_j|}{c} \right) \\ &\sim \frac{1}{12} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 r^2 \cdot \text{Acos} \omega \left(t_n - \frac{|x_j|}{c} \right) \\ &\leq \frac{1}{12} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 r^2 \cdot A \equiv M \end{aligned}$$

ただし A は解析解の振幅 ($c f_0 / 2 \omega$) であり、また $r \ll 1$ であるから二行目の括弧は $[1 - r^2 (1/r)^4] \sim -1/r^2$ としている。こうして差分方程式の厳密解 ϕ_j^n が位置 x_j , 時刻 t_n でもつ離散化誤差の上限は、 $n+1$ を n に置き換え

$$e_j^n \leq -e_j^{n-2} + r^2 e_{j-1}^{n-1} + 2(1-r^2) e_j^{n-1} + r^2 e_{j+1}^{n-1} + M \quad (73)$$

とあらわせる。この式は、 n を時間 t を遡らせて変化させるとわかるように、次のことを示している。時空点 (x_j, t_n) における振幅 ϕ_j^n を求める際、それに影響を及ぼす時空領域、すなわち影響領域はこの時空点をとる二本の特性曲線と $t=0$ の軸とで囲まれる三角形になる。そして時空点 (x_j, t_n) での誤差 e_j^n には、この影響領域内に含まれるすべての時空点での離散化誤差 M が加え合わさって寄与していくことになる。したがって $m = ct_n/a \sim r \cdot n$ とおくと、 (x_j, t_n) での誤差 e_j^n に寄与する影響領域内の時空点の数は、 $1+3+5+7+\dots+(2m+1) = (1+r \cdot n)^2 \sim (r \cdot n)^2$ となり、式(73)の右辺は次のようになる。

$$\begin{aligned} e_j^n &\leq (r \cdot n)^2 M = \frac{1}{12} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 r^4 \cdot n^2 \cdot A \\ &\quad \text{or} \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 (r \omega_0)^2 \cdot t_n^2 \cdot A \end{aligned} \quad (74)$$

こうして時刻 t_n でもつ誤差の上限は、それまでの経過時間 t_n の自乗に比例した大きさになることがわかる。式(7)に(70)で示した値、および振幅を a で無次元化した値 $A/a=2$ を用いると、この式の右辺で与えられる誤差の上限は $4 \cdot 10^{-7} \cdot n^2$ となる。これを用いて表-1にある源の粒子がもつ $n=400$ での誤差上限 ϵ_0 、および境界粒子がもつ $n=520$ (a の行)での誤差上限 ϵ_{20} をそれぞれ求めると、次のような結果となる。

理論的な誤差上限 シミュレーションの誤差

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \sim 0.064 &> \epsilon_{\max} = 0.0428 \\ \epsilon_{20} \sim 0.108 &> \epsilon_{\max} = 0.0377 \end{aligned}$$

こうして 透過境界条件のアルゴリズムを用いた計算の最大誤差は、理論的に与えられる誤差の上限を下回っていることが確かめられる。したがって ここで提唱された透過境界条件は、精度の観点からも十分に有効なものといえる。

おわりに

無限空間での進行波の振る舞いを、その中から切り出した有限な大きさの空間の中で再現するには、任意に設定した境界が無反射なものでなければいけない。ここではこの要請に応える境界条件として、一次元波動伝播でのインピーダンスの考えを利用した透過境界条件について述べてみた。一方、従来から境界層として吸収体を設置し、この吸収体がもつ抵抗によってエネルギー損失をさせ波を吸収する考え方がある。しかしこの方法は、それ自体、人工的であつ理論的にも反射波を内包する不十分なものであることを、連続体媒質を例にとり示してみた。さらに この方法が不十分であるもう一つの点は、境界を多くの粒子の集まりである層として扱うため、どうしても切り出した空間以上の大きさの計算領域が必要となることである。このため 実際の適用にあたっては、コンピュータのメモリーや計算回数も多くなり、非常に非効率的で有効とはいえないものであることを具体的に示してみた。

これに対し、インピーダンスを用いる透過境界条件の考え方は、理論的にも完全に無反射なものが期待できる方法に基づいており、また 境界はただ一個の粒子だけで十分である。したがって 切り出した空間以上の大きさの計算領域を必要としないため、メモリーや計算回数の面からも非常に効率的で実際的な方法といえる。

このような透過境界条件を差別化し、そのアルゴリズムを離散系媒質に適用して得られた結果を、変位とエネルギーの流れから示してみた。得られた結果では、波が

無反射で境界を透過していく状況が示され、とくに変位については併せて示した解析解の図、ならびに 誤差の評価の観点からも、ともに高い精度で一致していることが示された。これらの結果から、ここで述べた透過境界条件のアルゴリズムが十分に有効かつ実際的な手法であることがわかる。

しかし ここで述べた透過境界条件には、二つの適用限界があることを述べておく。一つはインピーダンスという考え方が、現在のところ一次元波動にしか有効でないため、この手法の適用が一次元問題に限られているという点である。確かに多くの波動伝播の問題では、その性質を見極めると一次元問題に還元される場合が多い。しかしながら、どうしても二次元以上の多次元にならざるを得ない問題に対しては、多次元インピーダンスの理論が与えられない限り、この方法は適用できない。

もう一つは、進行波がただ一つの振動数からなる単色波ではなく、多くの振動数からなる波の場合である。離散系媒質のインピーダンスは、必ず振動数 ω の関数となる。したがって 多くの振動数成分をもつ波が入射する場合、個々の振動数成分に対応したインピーダンスを用いて透過境界条件を設定しなければならない。この状況への対処は可能ではあるが、その場合 あらかじめ入射波の Fourier 解析が必要となる。そのためには、まずはじめに入射波を成分波に分ける。次いで、各成分波の振幅について透過境界条件を適用して計算をおこない、最終段階で各成分波の振幅をすべて足し上げて解を得る、という流れになる。したがって このようなステップを踏めば、十分適用できる方法である。

しかし 上のような制約を考慮しても、この方法の適用範囲はひろい。たとえば平面電磁波の伝播の例をとろう。この場合には、透磁率 μ を媒質の密度 ρ 、誘電率 ϵ を弾性力の逆数 $1/T$ に対応させ、電場の y 成分 E_y を $-T(\partial\phi/\partial x)$ 、磁場の z 成分 H_z を $(\partial\phi/\partial t)$ とおけばよい。すると 弦の横波としてこれまで述べてきたことは、 x 方向に伝播していく平面電磁波の物理に引き直すことができる。たとえば 電場と磁場の間で成り立つ $(\epsilon)^{1/2} E_y = (\mu)^{1/2} H_z$ の関係式からは、式(2)の伝播式 $\partial\phi/\partial t + c \cdot \partial\phi/\partial x = 0$ がえられる。また Maxwell の方程式の一つ $\text{rot } E = -\partial B/\partial t$ の z 成分の式からは、式(3)と同じ波動方程式がえられるし、Poynting ベクトルの x 成分からは式(10)のエネルギーの流れがえられる。インピーダンスは $Z = (\rho T)^{1/2} \sim (\mu/\epsilon)^{1/2}$ と、当然ながら電磁気学で与えられるものと一致する。このような対応関係を用いると、なかなか想像しにくい真空中での電磁波伝播の仕組みが、真空自体を 粒子とその間の弾性力という媒質モデルでの力学現

象として、簡潔に表現できることがわかる。

Summary

When calculating or simulating the travelling waves in a finite computational region, a new boundary condition which prevents boundary reflection is needed. The method presented here gives a transparent boundary condition algorithm using the impedance of a discrete medium model.

This algorithm was tested in simple cases and we observed no waves reflected from the boundary in case of one-dimensional wave propagation.

References

- [1] L. Brillouin: Wave Propagation in Periodic Structures, Dover Publications Inc., 1953.