J. Rakuno Gakuen Univ., **23** (1) : 5～16 (1998)

誤差の和がもつ確率分布

篠 崎 志 朗

Probability Distribution for the Sum of Independent Random Errors

Shiro SHINOZAKI
(May 1998)

はじめに

誤差をもつ数値の和には，誤差がともなう．その大きさは，和をつくる個々の数値がもつ誤差の累積和に等しい．そこで，次のような問題を考えてみる．いま，ある確率分布での誤差をもつ数値がいくつかあり，これらを加えて和をえた．このとき，この和がもつ誤差をどのように見積もればよいか．もっと端的には，小数部分をもつ n 個の実数があるとき，これらを四捨五入で整数になおして加え上げたなら，この和がもつ誤差はどの程度の大きさになるか，という例を想定すればよい．

コンピュータでの計算においても，これとよく似た状況がある．なんらかの演算をおこない，その結果を実数タイプの変数に次々と加えていく際，メモリー内でもちえる実数桁数の有限性から丸め誤差の累積が生じる．したがって，コンピュータがおこなう実数計算には，誤差がともなうものと考えてよい．科学計算の分野では，ほとんどの場合が実数型の計算で，その計算量も膨大である．そのため場合によっては，誤差だけからできあがった計算結果を手にしてしまうこともある．したがって科学計算では，複雑な計算になるほど，累積する丸め誤差と有効桁との関係には十分な注意を払う．

しかし，このような丸め誤差の累積見積もりに対し，誤差論は「実際的」で有効な手だてを与えてくれるかというと，期待はずれの点もある．その例として加算の場合が典型的で，誤差限界がそれぞれ ε_j である n 個の数の和を求めたとき，その和がもつ誤差限界は $\sum\varepsilon_j$ を超えない，と当たり前ことを述べるだけである[1),2)]．実際には，n 個の誤差の符号が（切り捨てや切り上げの場合を除いて）すべて正あるいは負になることはほとんどありえない．このような誤差論の評価は数学的には厳密だが，あまりにも大事をとりすぎており，誤差の上限値などを知っても，多くの場合は実際の用をなしえない[3),4)]．

知りたいことはもっと実際的なもので，たとえば「10 個の四捨五入誤差が累積したとき，その大きさが 2.5 を超えない確率は 99%である」とか，あるいは「累積誤差は 90%の確率で 2 を超えない」などのような実用的な表現である．本稿では，累積誤差の確率的な評価で必要となる確率密度関数を，誤差の種類をとわず一般的な式の形で導いてみる．その後，この式をいくつかの実際の誤差に応用し，累積誤差の大きさを変数とした確率関数を示してみる．

1．誤差の和がもつ確率密度関数の導出

独立した個々の誤差を足しあげて得られる値は，その大きさに応じて出現頻度が違う．こうした誤差の和についての出現確率を求める問題は，一般的な 1 次元の酔歩問題に引き直して考えることができる．すなわち，一連の計算過程で順次に発生する誤差を，個々の変位を同じとしない酔歩による変位と読みかえ，i 番目の計算過程で生じた誤差 ξ_i を，i 番目の酔歩で生じた変位とみなす．こうすると，n 個の独立な誤差をその発生順に並べた $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\cdots, \xi_n\}$ は，一連の n 回の酔歩で生じた変位をその歩みの順に並べたものとなる．こうして誤差の和の出現

酪農学園大学短期大学部　経営情報学科　情報処理システム研究室
Department of Management Information (Information Systems), Rakuno Gakuen University Dairy Science Institute, Ebetsu, Hokkaido 069-8501, Japan

確率を求める問題は，n 回の酔歩で生じたすべての変位 $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\cdots,\xi_n\}$ の和を

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i = x \tag{1}$$

とするとき，この和が x と $x+dx$ の間の値をもつ確率 $p_n(x)dx$ を求める問題に置換えられる．したがって，この確率密度関数 $p_n(x)$ を求めれば，問題は解かれたことになる．

ここで誤差 ξ は，与えられた連続区間内の任意の値をとるものとする．したがって，酔歩で生じる変位 ξ は連続的な値をとるものと考える．また，通常の実際的な問題において，同じ種類の計算過程で生じる個々の誤差，たとえば浮動小数点演算での丸め誤差がもつ確率分布は，すべての個々の誤差について同じとみなしてよい．すなわち，1 回目の誤差 ξ_1 がもつ確率分布も，2 回目の誤差 ξ_2 が持つ確率分布も同じ関数で与えられ，特別な状況の変化がないかぎり個々の誤差がもつ確率分布は変化しないものと考えてよい．したがって，個々の酔歩の変位 ξ はすべて同じ確率分布にしたがうものと考える．

変位 ξ の確率密度関数を $\phi(\xi)$ とし，これを ξ について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分した値は 1 に規格化されているものとする．すると，変位が ξ_i と $\xi_i+d\xi_i$ の間の値となる確率は $\phi(\xi_i)d\xi_i$ で与えられる．個々の酔歩で生じる変位はすべて同じ確率密度関数 $\phi(\xi)$ にしたがい，また個々の変位はお互いに独立と考えてよいのだから，一連の n 回の酔歩で変位が $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n\}$ となる確率は，一番目の変位が ξ_1 となる確率 $\phi(\xi_1)d\xi_1$, 二番目の変位が ξ_2 となる確率 $\phi(\xi_2)d\xi_2$,（三番目以降の変位についても同様にして,）すべての変位のもつ確率を順に乗じていけばよい．こうして得られる確率は，一連の変位が $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n\}$ で示される一本の酔歩の「経路」が出現する確率とみなせる．こう考えると，酔歩がたどるそれぞれの経路ごとに，その経路が生じる確率が付与されることになる．

ここで，経路のもつ確率和を勘定するため，便宜的に変位 ξ のとりえる値域を「任意に小さな間隔 Δ」で等分割するものと考える．すると，変位 ξ は離散的な値をとることになり，そのとりえる値の個数も可算的となる．こうして，間隔 Δ を任意に小さくする極限で，式(1)をみたす酔歩の経路は可算無限個あることになる．いま，これらの経路を変位 ξ につくプライムの数で区別するものとし，それらを次のようにあらわす．

$$\{\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3,\cdots,\xi'_n\},\{\xi''_1,\xi''_2,\xi''_3,\cdots,\xi''_n\},\{\xi'''_1,\xi'''_2,\xi'''_3,\cdots,\xi'''_n\},\cdots\cdots$$

各々の経路が生じる確率を求めるには，括弧内の個々の変位が生じる確率を順に乗じていけばよい．これらの経路すべては，変位の和が x であり，条件式(1)をみたしている．（正しくは，変位の和が x と $x+dx$ の間の値であると書くべきだが，以下では混乱がない限りこのように表現する．）　ここで，可算無限個あるどの経路も，それぞれの経路の生起確率に違いはあるが，等しい重みで変位の和が x となる確率 $p_n(x)dx$ に寄与するものと考える．ここでは簡単にするため，この重みを 1 とおく．すると，n 回の酔歩による変位の和が x と $x+dx$ の間の値をもつ確率 $p_n(x)dx$ は，変位の和が x となるすべての経路の確率を加えたものに等しい．

$$\begin{aligned}p_n(x)dx &= \sum\{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_n = x \text{ となる経路の確率}\}\\ &=\{\phi(\xi'_1)d\xi'_1\cdot\phi(\xi'_2)d\xi'_2\cdots\cdots\phi(\xi'_n)d\xi'_n\}+\\ &\quad\{\phi(\xi''_1)d\xi''_1\cdot\phi(\xi''_2)d\xi''_2\cdots\cdots\phi(\xi''_n)d\xi''_n\}+\\ &\quad\{\phi(\xi'''_1)d\xi'''_1\cdot\phi(\xi'''_2)d\xi'''_2\cdots\cdots\phi(\xi'''_n)d\xi'''_n\}+\cdots\cdots\\ &=\sum{}'\phi(\xi_1)d\xi_1\cdot\phi(\xi_2)d\xi_2\cdots\cdots\phi(\xi_n)d\xi_n\end{aligned}$$

ここでの和の記号 $\sum'$ は，$\sum_{j=1}^{n}\xi_j = x$ をみたす全ての $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$ の組み合わせについての和をとることを示す．

しかし，上式の右辺の形のままでは実際の問題に適用しずらいため，もっと実用的な形に変えておく必要がある．そこで，任意に小さな間隔 Δ によって離散的にされた変位 ξ を，間隔 Δ を限り無く小さくすることで，ふたたび連続的にとり扱えるようにする．この変更によって，右辺の和は $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$ についての n 重積分に置き換わる．しかし，この置き換えだけでは不十分で，元の和についていた式(1)の制約を積分に取り込んでおかねばならない．この制約は，$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$ が式(1)を満たすときは 1，そうでないときには 0，となるような因子

$$\delta(x-\sum_{j=1}^{n}\xi_j)dx$$

を被積分関数に乗じることで積分に反映できる．ここで δ は，Dirac の δ 関数である．こうして，制約つきの和をもつ上式の右辺は，次のような積分に置き換わる．

$$p_n(x)dx=\int d\xi_1\int d\xi_2\cdots\cdots\int d\xi_n\ \ \phi(\xi_1)\cdot\phi(\xi_2)\cdots\cdots\cdot\phi(\xi_n)\delta(x-\sum_{j=1}^{n}\xi_j)dx \tag{2}$$

この式(2)は，以下の計算での出発点となる式である．しかしこの式をよく眺めると，変位の回数 n が小さいとき，この式から直接に $p_n(x)$ を求めるのは容易だが，n が大きな場合，この形のままでの計算は容易でないことがわかる．そこで，式(2)をもっと実際的で便利な形に変えておくほうがよい．

まず，簡単な場合である 2 つの変位の和の確率 $p_2(x)dx$ を，式(2)から求めてみると，

$$\begin{aligned}p_2(x)dx&=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\phi(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_2\phi(\xi_2)\delta(x-\xi_1-\xi_2)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\phi(\xi_1)\cdot\phi(x-\xi_1)dx\end{aligned}$$

となり，2 つの変位の和の確率密度関数は，それぞれの変位がもつ確率密度関数，いまの場合は共に同じ関数である $\phi(\xi)$ の間のたたみ込みになっていることがわかる．次に 3 つの変位の和の場合を，式(2)から求めてみる．

$$\begin{aligned}p_3(x)dx&=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\phi(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_2\phi(\xi_2)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_3\phi(\xi_3)\,\delta(x-\xi_1-\xi_2-\xi_3)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\phi(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_2\phi(\xi_2)\phi(x-\xi_1-\xi_2)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\phi(\xi_1)p_2(x-\xi_1)dx\end{aligned}$$

こうして，3 つの変位の和の確率密度関数も $p_2(x)$ と $\phi(\xi)$ のたたみ込みとなる．この結果から，一般に n 個の変位の和 x がもつ確率密度関数は，次のようになることがわかる．

$$p_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ p_{n-1}(x-\xi)\cdot\phi(\xi),\qquad p_1(x)=\phi(x) \tag{3}$$

これは確率密度関数についての漸化式で，最初に p_1 を与えると順次に任意の p_n までが求まる．式(3)の形は，同じく $p_n(x)$ を与える式(2)と比べてかなり使いやすくなっている．

しかしまだ欠点がある．式(3)を用いた方法で p_n を求めようとすると，それまでに $n-1$ 個の確率密度関数を次々と求めていく必要があり，欲しいを p_n 得るまでには手間がかかる．たとえば n が 100 のとき，p_{100} を得るまでに p_2 から p_{99} を順に求めていかねばならず，これは実際的ではない．そこで，式(3)をさらに実用的な形にする必要がある．

式(3)を眺めると，これは 2 つの関数のたたみ込みとなっているから，たたみ込みの Fourier 変換はそれぞれの関数の Fourier 変換の単純な積になることが利用でき，式(3)は Fourier 変換の間の漸化式になるはずである．そこで，$p_n(x)$ と $\phi(\xi)$ の Fourier 変換をそれぞれ $\hat{p}_n(k)$ と $\hat{\phi}(k)$ とおくと，式(3)を Fourier 変換したものは

$$\hat{p}_n(k)=\hat{p}_{n-1}(k)\cdot\hat{\phi}(k)=\hat{p}_{n-2}(k)\cdot\hat{\phi}(k)^2=\{\hat{\phi}(k)\}^n \tag{4}$$

という簡単な式に置き変わる．こうして $p_n(x)$ は，$\hat{p}_n(k)$ のただ 1 回だけの逆変換で求まることがわかる．

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{ikx}\{\hat{\phi}(k)\}^n\qquad \text{ただし，}\ \hat{\phi}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ e^{-ikx}\phi(x). \tag{5}$$

任意の n に対する p_n がただ 1 回の積分だけで求まる式(5)は，その内容が式(2)や式(3)と同じであるにもかかわらず，随分と実用的なものになっている．

こうして，n 回の酔歩による変位の和が x と $x+dx$ の間の値となるとき，その確率 $p_n(x)dx$ を与える確率密度関数 $p_n(x)$ を求めるには，まず個々の変位に共通な確率密度関数 $\phi(\xi)$ の Fourier 変換 $\hat{\phi}(k)$ を求め，次いでこれを n 乗したものを Fourier 逆変換すればよいことになる．以下では式(5)をあらためて出発点とし，その応用を示してみる．

まず応用に先立って，$p_n(x)$ が 1 に規格化されていることをきちんと示しておく．これは式(5)を用いるよりも，これと等価な式(2)を用いるとすぐに示される．

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ p_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\phi(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_2\phi(\xi_2)\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_n\phi(\xi_n)\int_{-\infty}^{+\infty}dx\delta(x-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\phi(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_2\phi(\xi_2)\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_n\phi(\xi_n)\cdot 1=1\cdot 1\cdots\cdot 1=1$$

また，式(5)をさらに一般化した表現を与えておこう．問題によっては，個々の変位がそれぞれ違った確率密度関数 $\phi_j(\xi)(j=1,2,\cdots,n)$ にしたがうことも考えられる．この場合，n 回の変位の和が x と $x+dx$ の間の値となる確率密度関数 $p_n(x)$ は，

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{ikx}\prod_{j=1}^{n}\hat{\phi}_j(k),\qquad ただし\ \hat{\phi}_j(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{-ik\xi}\phi_j(\xi) \tag{6}$$

と与えられる．このことは式(5)の形からも容易に類推できる．

これ以降の節では，確率密度関数 $p_n(x)$ を与える式(5)が一般的で応用性のある式であることを，具体的な例によって示してみる．

2．確率密度関数の具体例

誤差 ξ がもつ確率密度関数 $\phi(\xi)$ を具体的に与えて，式(5)からいくつかの確率密度関数 $p_n(x)$ を求めてみる．前節では，誤差を変位と読みかえて式(5)を導いたが，ここではこの置き換えをもとの誤差にもどしておく．

誤差としては，実数を整数にする際に生じる丸めの誤差を対象とする．誤差をこのように限定しても，以下で述べることは一般性を失わない．任意の桁位置での丸めの誤差は，これに定数である10のべき乗を乗じておけば，いつでも上記のような誤差に還元できるからである．ここでは丸めの誤差として，四捨五入の誤差，切り捨ての誤差，指数分布をする誤差の3つの種類を取り上げ，これらの誤差が累積していくとき，その累積和がしたがう確率密度関数を求めてみる．

2－1．四捨五入誤差の場合

誤差 ξ の確率密度関数 $\phi(\xi)$ は，x が正（負）のとき値1(0)をもつ階段関数 $\theta(x)$ を用い，

$$\phi(\xi)=\theta(\frac{1}{2}-|\xi|) \tag{7}$$

とあらわせる．この関数の Fourier 変換は

$$\hat{\phi}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ e^{-ik\xi}\theta(\frac{1}{2}-|\xi|)=\frac{1}{ik}(e^{ik/2}-e^{-ik/2})$$

であるから，n 個の四捨五入誤差の和が x と $x+dx$ の間の値となる確率 $p_n(x)dx$ を与える確率密度関数 $p_n(x)$ は，式(5)を用いて

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi i^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-m)!}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\frac{e^{ik(x+\frac{n}{2}-m)}}{k^n} \tag{8}$$

と表わせる．

この積分は，複素 k 平面上での経路を指定した複素積分により，一意的に決まる．実軸上の原点は被積分関数の n 位の極で，そこでの留数は

$$\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}(x+\frac{n}{2}-m)^{n-1}$$

となる．$x+n/2-m>0$ のときの積分路として，実軸上の$-\infty$から$+\infty$に向かう積分路に，k 平面の上半面にある無限大の半円周の部分を反時計回りにまわる経路を加え，全体として閉じた経路をとる．このとき実軸上の極を，上半面にある無限小の半円周で避けておく．このような閉じた積分路をとると，この内側には特異点がないから，Cauchy の積分定理が適用できて積分はゼロとなる．一方，この閉じた経路での積分を，実軸上の積分と上半面にある無限大の半円周の部分の積分の和に分けて考えると，後者は Jordan の定理からゼロとなる．こうして実軸上での主値積分だけが残り，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dk\frac{e^{ik(x+\frac{n}{2}-m)}}{k^n}=i\pi\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}(x+\frac{n}{2}-m)^{n-1}\theta(x+\frac{n}{2}-m) \tag{9}$$

を得る．$x+n/2-m<0$ のときの積分路としては，実軸上の $-\infty$ から $+\infty$ に向かう積分路に，k 平面の下半面にある無限大の半円周の部分を時計回りにまわる経路を加え，全体として閉じた経路をとればよい．その結果は，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{ik(x+\frac{n}{2}-m)}}{k^n} = -i\pi\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}(x+\frac{n}{2}-m)^{n-1}\theta(m-x-\frac{n}{2}) \tag{10}$$

となる．

したがって，n 個の四捨五入誤差の和がもつ確率密度関数は，次のようになる．

$$p_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(x+\frac{n}{2}-m)^{n-1}\varepsilon(x+\frac{n}{2}-m) \tag{11}$$

ここで

$$\varepsilon(x+\frac{n}{2}-m) = \theta(x+\frac{n}{2}-m) - \theta(m-x-\frac{n}{2})$$

であり，$\varepsilon(x)$ は $x>0$ のとき 1，$x=0$ のとき 0，$x<0$ のとき -1，となる関数である．こうして任意の n に対する確率密度関数は式(11)から求められるが，当然のこととして $n=1$ の場合に p_1 と式(7)は一致していなければならず，これをきちんと確認しておく必要がある．式(11)で $n=1$ とおくと

$$p_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon(x+\frac{1}{2}) - \varepsilon(x-\frac{1}{2})\right] = \theta(\frac{1}{2}-|x|)$$

となり，たしかに p_1 が式(7)と一致していることが示される．

次に n 個の誤差の和を x とし，この大きさ $|x|$ が X を超えない確率 $P_n(|x|\le X)$ を求める．式(11)を用いて

$$P_n(|x|\le X) = \int_{-X}^{+X} dx\ p_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}\int_{-X}^{+X} dx(x+\frac{n}{2}-m)^{n-1}\varepsilon(x+\frac{n}{2}-m)$$

となる．この積分項は，部分積分によって次のようになる．

$$積分項 = \frac{1}{n}(x+\frac{n}{2}-m)^n\varepsilon(x+\frac{n}{2}-m)\Big|_{-X}^{+X} + \frac{1}{n}\int_{-X}^{+X} dx(x+\frac{n}{2}-m)^n\delta(x+\frac{n}{2}-m)$$

右辺の第 2 項にある積分は，デルタ関数 $\delta(x)$ のもつ性質 $x\delta(x)=0$ から常にゼロとなり，第 1 項のみが残る．

よって，

$$P_n(|x|\le X) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}\left\{(X+\frac{n}{2}-m)^n\varepsilon(X+\frac{n}{2}-m) - (-X+\frac{n}{2}-m)^n\varepsilon(-X+\frac{n}{2}-m)\right\}$$

となる．

実際に確率を計算するには，この式をもう少し簡単な形に変形する必要がある．第 1 項は $X+\frac{n}{2}=m$ を境に 2 つの項に分けられる．また，第 2 項も $\frac{n}{2}-X=m$ を境にして 2 つに分けられるから，上の式の右辺は次の 4 つの項の和で表わされる．

$$\begin{aligned}P_n(|x|\le X) = &\ \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{<X+\frac{n}{2}}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(X+\frac{n}{2}-m)^n - \frac{1}{2}\sum_{m>X+\frac{n}{2}}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(X+\frac{n}{2}-m)^n \\ &-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}-X}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(-X+\frac{n}{2}-m)^n + \frac{1}{2}\sum_{m>\frac{n}{2}-X}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(-X+\frac{n}{2}-m)^n\end{aligned}$$

ここで，第 1 項は $X+\frac{n}{2}$ を超えない整数までの和，第 2 項の和は $X+\frac{n}{2}$ を超える最初の整数からの和である．第 3 項と第 4 項の和についても，$-X+\frac{n}{2}$ を境にして同様である．また，和の上限･下限に等号が含まれないのは，$x=a$ で $\varepsilon(x-a)=0$ であるためである．更に上の式の右辺にある第 2 項と第 4 項に対し，m を $m'=n-m$ と置換えてさらに変形すると，第 2 項は第 3 項に，第 4 項は第 1 項に等しいことがわかる．

こうして，n 個の四捨五入誤差の和が x のとき，この大きさが X を超えない確率は，

$$P_n(|x|\le X) = \sum_{m=0}^{<X+\frac{n}{2}}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(X+\frac{n}{2}-m)^n - \sum_{m=0}^{<-X+\frac{n}{2}}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(-X+\frac{n}{2}-m)^n \tag{12}$$

と表わすことができる．式(12)は近似のない正確な式で，任意の n に対して用いられる．(この式と同じ内容のものが引用文献 3 で天下り的に与えられている．どのようにしてこの式が得られたのか，それを自分なりに導きたいことが本稿のきっかけとなった.)

しかし n が大きくなると，この式による計算量は膨大なものになる．それゆえ，この式は比較的小さな n に対してのみ実用的で，大きな n に対しては，もっと簡便で計算量の少ない別の式が必要となる．これについては，

第3節で述べる．ここでは式(12)を用いて，次の2つの確率の計算例だけを示しておく．

計算例1：10個の四捨五入誤差の和が大きさ2.5以内である確率
式(12)において，$n=10$，$X=2.5$，第1項の和の上限を $m=7$，第2項の和の上限を $m=2$ として計算する．確率は99.6％となる．

計算例2：5個の四捨五入誤差の和が大きさ1.0以内である確率
式(12)において，$n=5$，$X=1.0$，第1項の和の上限を $m=3$，第2項の和の上限を $m=1$ として計算する．確率は87.6％となる．

2−2．切り捨て誤差の場合

この場合に個々の誤差 ξ がしたがう確率密度関数 $\phi(\xi)$ は，

$$\phi(\xi)=\theta(1-\xi)\theta(\xi) \tag{13}$$

となる．この Fourier 変換は

$$\hat{\phi}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ \theta(1-\xi)\theta(\xi)e^{-ik\xi}=\frac{1}{ik}(1-e^{-ik})$$

であるから，n 個の切り捨て誤差の和が x と $x+dx$ の間の値となる確率 $p_n(x)dx$ を与える確率密度関数 $p_n(x)$ は，式(5)を用いて

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi i^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-m)!}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\frac{e^{ik(x-m)}}{k^n} \tag{14}$$

となる．この積分もまた，四捨五入の場合と同様な積分路を指定した複素 k 平面での積分で求められる．すなわち，$k=0$ の n 位の極を上半面にある微小な半円で避けた実軸上の積分路に対し，$x>m$ の場合は上半面にある非常に大きな半円を加え，この閉じた積分路で複素積分をおこなう．$x<m$ の場合は，下半面にある大きな半円で閉じる．こうして n 個の切り捨て誤差の和がもつ確率密度関数は，次のようになる．

$$p_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(x-m)^{n-1}\varepsilon(x-m) \tag{15}$$

この関数と四捨五入の場合の式(11)をくらべると，式(11)の $x+\frac{n}{2}$ を x に置換えたものが式(15)となっていることがわかる．この置換えの意味は次のようになる．1個の切り捨て誤差がもつ平均的な値は $\frac{1}{2}$ であるから，n 個の切り捨て誤差の和の平均的な値は $\frac{n}{2}$ となる．したがって，n 個の切り捨て誤差は平均的にこの分だけ四捨五入誤差より大きい．よって，四捨五入誤差の和 x に $\frac{n}{2}$ を加えたものを，切り捨て誤差の和である x と置換えればよい．

次に，n 個の誤差の和 x が X を超えない確率を求めてみる．切り捨ての場合，個々の誤差は正であるから x は正である．この確率を $P_n(x\leq X)$ とおき，式(15)を用いて

$$P_n(x\leq X)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}\int_0^X dx(x-m)^{n-1}\varepsilon(x-m)$$

となる．前節と同様に部分積分をおこない，デルタ関数 $\delta(x)$ のもつ性質 $x\delta(x)=0$ に留意して計算をおこなうと，

$$P_n(x\leq X)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}\{(X-m)^n\varepsilon(X-m)+(-m)^n\}$$

となる．前節と同じく，この式もさらに計算に便利な形に直せる．右辺の括弧の中の第1項の和を $m=X$ で分けてさらに変形し，計算に便利な形にすると，n 個の切り捨て誤差の和が X を超えない確率を与える最終的な式の形は，次のようになる．

$$P_n(x\leq X)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{<X}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(X-m)^n-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{<n-X}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(n-X-m)^n+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(n-m)^n \tag{16}$$

ここで，第1項は X を超えない整数までの和，第2項の和は $n-X$ を超えない整数までの和である．

ここで，10個の切り捨て誤差の和が5を超えない確率を求め，式(16)の妥当性を確かめてみる．あえて計算せずとも，この確率は50％と予想される．式(16)で $n=10$，$X=5$ とおけばよい．第1項と第2項の和での m の

上限値は，ともに4となる．しかしこの2つの項は相殺されて第3項しか残らず，確率 $P_{10}(x \leq 5)$ は

$$P_{10}(x \leq 5) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{10}\frac{(-1)^m}{m!(10-m)!}(10-m)^{10} \cong 0.5$$

となり，予想された値と同じである．

2−3．指数分布をする変位の場合

指数分布をするような誤差は，身近ではあまり経験しない．したがって，ここではふたたび誤差を変位と読みかえ，個々の変位 ξ が指数分布にしたがうような1次元酔歩を想定する．ただし問題を簡単にするため，個々の変位 ξ が $\xi \geq 0$ であるような酔歩と仮定する．このときの確率密度関数 $\phi(\xi)$ とその Fourier 変換は，次のように与えられる．

$$\phi(\xi) = ae^{-a\xi} \qquad (17a), \qquad \hat{\phi}(k) = \frac{a}{a+ik} \qquad (17b)$$

ただし $a = 1/\bar{\xi}$，$\bar{\xi}$ は平均変位である．n 回の酔歩での変位の和が x となる確率を与える確率密度関数 $p_n(x)$ は，式(5)を用いて

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{ikx}\left\{\frac{a}{a+ik}\right\}^n = \frac{a^n}{2\pi i^n}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\frac{e^{ikx}}{(k-ia)^n} = \frac{a^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-ax} \qquad (18a)$$

となる．ここで $x > 0$ であるから，積分は複素 k 平面の実軸を含む上半面で閉じた経路に沿っておこなう．こうして得られた $p_n(x)$ は，一見すると Poisson 分布とよく似た形をしている．n が大きくて $n \simeq n-1$ とみなせるとき，

$$x \cdot p_n(x) \approx \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ \lambda = ax \qquad (18b)$$

となる．こうして，式(18a)に x を乗じたものは，n が大きいとき Poisson 分布に近似できる．次に，n 個の変位の和 x が X を超えない確率を $P_n(X)$ とおき，これを求めると，

$$P_n(X) = \int_0^X dx\ p_n(x) = \frac{a^n}{(n-1)!}\int_0^X dx\ x^{n-1}e^{-ax}$$

となる．ここで $2ax = t$，$\nu = 2n$ とおいて積分を変形すると，

$$P_n(X) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_0^{2aX}dt\ t^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}} \qquad (19)$$

となる．この右辺は，丁度 $2aX = \chi^2$ とした自由度 $\nu = 2n$ の χ^2 分布と同じ形をしている．したがって，それぞれの変位が同じ指数分布にしたがうとき，n 個の変位の和の大きさが X を超えない確率 $P_n(X)$ は，χ^2 の値が $2aX$ を超えないとした自由度 $2n$ の χ^2 分布で与えられることがわかる．このときの χ^2 は，$a = 1/\bar{\xi}$ であるから，X のなかに含まれる平均変位 $\bar{\xi}$ の個数の2倍という意味をもつ．したがって，式(19)の χ^2 分布は，$2X$ のなかに含まれる平均変位 $\bar{\xi}$ の個数についての確率分布であるとも解釈できる．

3．中心極限定理と正規分布の再現性

式(5)導出にあたって，何らかの制約条件や近似は一切なかった．したがって，この式から得られた前出の確率密度関数や確率の式は，近似のない正確なもので，任意の大きさをもつ n に適用できる．しかし，こうして得られた式(12)あるいは式(16)を用いて，n が大きいときの確率 P_n を求めようとすると，たとえこれらが正確な式であってもその計算量は膨大となる．したがって実際には，小さな n の場合にのみこれらの式が使用でき，大きな n の場合にはもっと実用的な式が必要になる．

ここでは式(5)から，大きな n のときに適用できる計算量の少ない，簡便で実用的な式を導いてみる．ここで導かれる結果は，統計学での中心極限定理に対応している．また，式(5)を利用することで正規分布の再現性が容易に導けることも示してみる．

3−1．中心極限定理

まず，n が大きい場合に適用できる確率密度関数を導いてみる．その際，$p_n(x)$ を与える式(11)あるいは式(15)

を，n が大きなときの漸近形に変形するという個別対処的な方法はとらない．むしろ，一般性のある結果をえるためには，式(5)が任意の確率分布に対して成立ったように，ふたたび式(5)から出発するほうがよい．ここでは n が大きいときの漸近形を鞍点法により求めてみる．式(5)を次の二番目の右辺のように書きなおす．

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{ikx}\{\hat{\phi}(k)\}^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{nf(k)} \tag{5}$$

ここで $\hat{\phi}(k)$ は，個々の誤差がしたがう確率密度関数 $\phi(\xi)$ の Fourier 変換

$$\hat{\phi}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ \phi(\xi)e^{-ik\xi} \tag{20}$$

であり，k は複素数，$f(k)$ は複素関数

$$f(k)=\ln\hat{\phi}(k)+ik\tilde{x},\quad ただし\ \tilde{x}=x/n \tag{21}$$

である．ここでいくらかの計算をおこない，$f(k)$ の実部と虚部は Cauchy-Riemann 関係をみたした解析関数であること，また，実部は積分の両端において負の無限大になっていることが確かめられる．Cauchy-Riemann 関係が成立つため，実部は Laplace の方程式をみたし，鞍点をもつことが保証される．したがって n が大きなとき，式(5)の積分に鞍点法が適用でき，元の積分路を f の実部が鞍点で極大となるような経路に変更できる．

鞍点の位置は，式(21)の k についての微分をゼロとおくことで求まる．これを k_s とすると，k_s は複素 k 平面の原点近くにあることが次のように予想できる．式(20)の右辺の被積分関数にある $e^{-ik\xi}$ は振動の因子で，$|k|$ が大きくなるほど空間的に細かく激しく振動する．一方，誤差の確率密度である $\phi(\xi)$ は，前述の四捨五入や切り捨ての例にあるように，一般にゆるやかに変化する関数である．このゆるやかな変動関数と振動因子との積についての積分は，振動が細かく激しいほどゼロに近づく．すなわち，$\hat{\phi}(k)$ の大きさは $|k|$ が大きくなるほど小さくなる．それゆえ，n が大きな値をもつとき，$|k|$ が大きくなるにしたがって $\{\hat{\phi}(k)\}^n$ は急速に小さくなるから，n が大きなときの式(5)の被積分関数は，$|k|$ が十分に小さな領域でしか積分に寄与しない．こうして，鞍点 k_s は複素 k 平面の原点近くにあることが予想され，これを考慮して鞍点を求めればよい．

添字 s は $k=k_s$ での値を，f と ϕ につく右肩のプライムは k での微分であることを表わすと，鞍点は次の式を満たす．

$$\frac{df}{dk}(k_s)=f_s'=\frac{\hat{\phi}_s'}{\hat{\phi}_s}+i\tilde{x}=-i\bar{\xi}_s+i\tilde{x}=0,\qquad ただし\ i\frac{\hat{\phi}_s'}{\hat{\phi}_s}=\bar{\xi}_s \tag{22}$$

ここで k_s'，k_s'' とそれぞれ k_s の実部と虚部とし，$k_s=k_s'+ik_s''$ とおいて，$\bar{\xi}_s$ を具体的に示すと次のようになる．

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_s&=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ e^{-ik_s\xi}\xi\phi(\xi)\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ e^{-ik_s\xi}\phi(\xi)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ e^{k_s''\xi}\xi\phi(\xi)(\cos k_s'\xi-i\sin k_s'\xi)\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ e^{k_s''\xi}\phi(\xi)(\cos k_s'\xi-i\sin k_s'\xi)\end{aligned} \tag{23}$$

これは $e^{-ik_s\xi}\phi(\xi)$ を確率密度関数とする ξ の平均を与える式になっている．一方，$\tilde{x}$ は実であるから，式(22)から $\bar{\xi}_s$ も実でなければならない．したがって，式(23)で与えられる $\bar{\xi}_s$ が実であるためには，$k_s'=0$ でなければならない．こうして鞍点 k_s は純虚数であり，虚軸上での原点近くにあることがわかる．それゆえ鞍点の位置は，式(23)の右辺を k_s'' が非常に小さいとして近似計算したのち，その結果を $\tilde{x}$ に等しいとおくことで求まり，

$$k_s=ik_s''=i(\tilde{x}-\bar{\xi})/\sigma^2=i(x-n\bar{\xi})/n\sigma^2 \tag{24}$$

となる．$\sigma^2=\overline{\xi^2}-\bar{\xi}^2$ は ξ の分散で，$\bar{\xi}$ と $\overline{\xi^2}$ は確率密度分布 $\phi(\xi)$ のもとでの ξ と ξ^2 の平均である．式(24)から，n が大きいときの k_s の振舞いがわかる．n が大きくなっても分子の値の変化は小さいが，分母は n に比例して大きくなる．したがって，n が大きくなるとともに，鞍点 k_s は徐々に原点に接近していく．

次に，鞍点をとおる積分路を決める．鞍点 k_s の近傍での $f(k)$ は，$k=k_s+te^{i\alpha}$ とおくと，

$$f(k)=f(k_s)+\frac{1}{2}(k-k_s)^2f''(k_s)=f(k_s)-\frac{1}{2}\sigma_s^2t^2\,e^{i2\alpha} \tag{25}$$

となる．ここで偏角 α は，鞍点をとおり抜ける際の積分路の方向と実軸とのなす角である．また，鞍点位置での $f''(k_s)$ の値を $-\sigma_s^2$ とおいた．これは $f''(k_s)$ を実際に計算すると，$e^{k_s''\xi}\phi(\xi)$ を確率密度関数とした ξ の分散に負符号をつけたものに等しくなるためである．鞍点をとおる積分路は，f の実部の最急降下線であると同時に，f の虚

部が一定な等値線でもなければならない．そのため式(25)の虚部を求め，これが一定値をもつためには $\alpha=0$ でなければならないことがわかる．

こうして積分路は虚軸上の鞍点を実軸と平行に通過し，式(5)の積分の値は鞍点近傍での f の値をもちいて，

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,\exp\left\{n\left[f(k_s)-\frac{1}{2}\sigma_s^2t^2\right]\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma_s^2}}e^{f(k_s)} \tag{26}$$

と近似される．あとは $f(k_s)$ を求めればよい．この値は，k_s が小さいとしたときの式(20)の積分近似を式(21)に入れ，かつ対数 $\ln(1+\varepsilon)$ の $\varepsilon\ll1$ のときの近似式 $\varepsilon-\varepsilon^2/2$，および式(24)を用いていくらか計算をおこなえば，

$$f(k_s)=ik_s(\tilde{x}-\bar{\xi})-\frac{1}{2}k_s^2(\overline{\xi^2}-\bar{\xi}^2)=-\frac{1}{2}\frac{(x-n\bar{\xi})^2}{n\sigma^2} \tag{27}$$

と求まる．ここで再び $\sigma^2=(\overline{\xi^2}-\bar{\xi}^2)$ とおいた．

こうして n が大きいときの式(5)の漸近形は，鞍点法をもちいて

$$p_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma_s^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-n\bar{\xi})^2}{n\sigma^2}\right\} \tag{28}$$

となることが導かれた．平方根のなかにある σ_s と，指数関数の肩にある σ との違いを除くと，これは正規分布の形をしている．しかし式(24)からわかるように，n が大きくなると k_s は 0 に近づくから，n が大きい極限で σ_s を σ に等しいとおいてよい．すると，式(28)は正規分布そのものになる．

n が大きいときの確率密度関数 $p_n(x)$ は，個々の誤差がもつ確率密度 $\phi(\xi)$ によらず，常に式(28)の形をもつ正規分布関数で『近似』されることが示されたが，このとき種々の誤差分布のもつ固有の性質が反映されるのは，正規分布のパラメータである $n\bar{\xi}$ と $n\sigma^2$ に対してだけである．また，式(5)の漸近形である(28)の導出は，統計学での中心極限定理を示したことにもなる．なお文献5では，上記とは別な手法によって，この定理の数学的に厳密な証明がなされている．

n が大きな値であるとき，式(11)や(15)に代って，$\sigma_s=\sigma$ とおいた式(28)の積分から確率を求めるほうが手間もかからない．また n が大きくなるほど，近似による誤差も僅かなものになる．実際，四捨五入の確率密度関数である式(11)と式(28)との形状をコンピュータを用いて描き，これを比較してみると，n が5を超えるあたりから一致の程度がよくなってくる．第2－1節の計算例1での確率を式(28)から求めると 0.994 であり，式(12)を用いた場合の 0.996 との差は僅かである．したがって，小数第2位までの精度でよいなら，式(28)を代用するおおまかな n の目安は，10以上とするのが妥当と思われる．

3－2．正規分布の再現性

個々の誤差がしたがう確率密度関数 $\phi(\xi)$ が正規分布であるとき，この誤差の和もまた正規分布にしたがう．これは，統計学でよく知られている正規分布の再現性の例である．これを式(5)を用いて示してみる．いま，正規分布である $\phi(\xi)$ とその Fourier 変換を

$$\phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-(x-\bar{\xi})^2/2\sigma^2},\qquad \hat{\phi}(k)=\exp(-ik\bar{\xi}-\frac{1}{2}\sigma^2k^2)$$

とおく．これを式(5)に入れて $p_n(x)$ を求めると，

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\,e^{ikx}\left\{\exp(-ik\bar{\xi}-\frac{1}{2}\sigma^2k^2)\right\}^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}e^{-(x-n\bar{\xi})^2/2n\sigma^2}=N(n\bar{\xi},\,n\sigma^2)$$

と再び正規分布が得られる．

このように式(5)を用いると，細々とした計算などなしに，正規分布の再現性についても容易かつ端的に示すことができる．

4．離散的な誤差モデルからの確率関数

4－1．離散的な誤差の和がもつ確率

誤差 ξ のとる値は，離散的な値 $e_1,e_2,e_3,\cdots$ のいずれかであるとする．また，それぞれの誤差 e_j が生じる確率を ϕ_j とおく．第1節のときと同様に，1回目に発生した誤差を ξ_1，2回目の誤差を ξ_2，3回目の誤差を ξ_3 とし，これら n 個の誤差を「発生順」に並べたものを $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n\}$ とあらわし，これを経路と呼ぶことにする．このと

き，経路をつくる個々の誤差は $e_1,e_2,e_3,\cdots$ のいずれかの値であるから，1本の経路をつくる n 個の誤差のなかに等しい値のものがいくつかあらわれる．たとえば，$\{e_3,e_1,e_2,e_1,e_3\}$ の経路では，e_1 が2個，e_2 が1個，e_3 が2個あらわれている．

ここで式(2)の離散的な表現を求めてみるが，まず簡単な例で誤差の和が E となる確率を求めてみる．5個の誤差の和が E となる1つの経路として，$\{e_3,e_1,e_2,e_1,e_3\}$ をとる．このとき $E=2e_1+e_2+2e_3$ が成立しており，この経路が生じる確率は $\phi_1^2\phi_2\phi_3^2$ である．しかし，同じ E を与える経路はこれだけとは限らない．経路 $\{e_3,e_1,e_2,e_1,e_3\}$ をつくる誤差を並べ替えたものも同じ E を与える経路として勘定されるから，5個の誤差を並べ替えたの数だけの経路がある．いまの場合，e_1 が2個，e_2 が1個，e_3 が2個であるから，そのような経路は $5!/(2!\cdot1!\cdot2!)=30$ 通りある．こうして，e_1 が2個，e_2 が1個，e_3 が2個からなるような経路群がもつ確率は，$30\cdot\phi_1^2\phi_2\phi_3^2$ で与えられる．

さらにまた，誤差の和が E となるのは，なにも e_1 が2個，e_2 が1個，e_3 が2個からなるような経路群だけとは限らない．e_j の値によっては，e_1 が1個，e_2 が3個，e_3 が1個からなるような経路群もありえるし，その他の組み合わせもありえる．こうした経路群のすべてについて上述の手順で確率を求め，これら全てを足し上げたものが，誤差の和が E となる確率を与える．

この考え方にそって，n 個の離散誤差の和が E となる確率 $p_n(E)$ を求めてみる．まず，経路の中に e_1 が n_1 個，e_2 が n_2 個，e_3 が n_3 個，…あらわれるような経路群の数は，

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots}$$

だけある．これにこの経路群が生じる確率 $\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2}\phi_3^{n_3}\cdots$ を乗じ，あとは

$$\sum n_j=n,\ \ \sum n_je_j=E \tag{29}$$

をみたす全ての $(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ の組み合わせについて和をとればよい．こうして，式(2)を離散的な誤差の場合について書き直した式は次のようになる．

$$\begin{aligned}P_n(E)&=\sum\{\textstyle\sum n_j=n\text{ で，かつ }\xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots=\sum n_je_j=E\text{ となる全ての経路の確率}\}\\&=\sum{}'\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots}\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2}\phi_3^{n_3}\cdots\end{aligned} \tag{30}$$

が得られた．ここで，和の記号 $\sum'$ は，式(29)の2つの条件をみたす $(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ のすべての組み合わせについての和である．もし，和をとる条件が(29)の最初の式だけなら，式(30)の右辺は $(\phi_1+\phi_2+\phi_3+\cdots)^n=1$ に等しくなる．しかし二番目の条件を付加することで，この n 乗の展開項の中から，誤差の和が E となるものだけが選び出される．こうして式(30)の右辺の値は1以下となる．

4−2．確率 $P_n(E)$ の簡便な導出法

ここでもふたたび，第1節で導いた式(5)の有用性を示してみる．前節の式(30)の導出にあたっては，制約条件(29)を満たした経路の数を勘定するなど，面倒なことが多かった．しかし δ 関数を用いて，離散的な誤差の確率密度関数を

$$\phi(\xi)=\phi_1\delta(\xi-e_1)+\phi_2\delta(\xi-e_2)+\cdots=\sum\phi_j\delta(\xi-e_j) \tag{31}$$

とおくと，あとはただ式(5)を用いるだけで，ただちに式(30)と同じ結果が得られる．ただし，規格化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ \phi(\xi)=1$ より，$\sum\phi_j=1$ とする．

まず，式(31)の Fourier 変換を求める．

$$\hat{\phi}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\ \phi(\xi)e^{-ik\xi}=\sum\phi_je^{-ike_j} \tag{32}$$

次にこれを式(5)に入れ，積分の中で式(32)の n 乗を展開するだけでよい．こうして

$$p_n(E)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{ikE}\{\hat{\phi}(k)\}^n$$
$$=\sum\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots}\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2}\phi_3^{n_3}\cdots\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ e^{ik(E-n_1e_1-n_2e_2-n_3e_3-\cdots)}$$
$$=\sum\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots}\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2}\phi_3^{n_3}\cdots\delta(E-\sum n_je_j) \qquad (33)$$

が得られる．ここで和をとる際の制約は，$\sum n_j=n$ となるような $(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ の組み合わせについてだけで，これは式(32)の n 乗を展開したのだから当然のことである．したがって，式(29)にあるもう一つの制約 $\sum n_je_j=E$ は，式(33)の和 $\sum$ には含まれていない．この省かれた制約は，式(33)にある δ 関数で自動的に調整されている．

式(33)を離散的な表現に変えるには，まず式(33)の両辺に dE を乗じたのち，右辺の $\delta(E-\sum n_je_j)dE$ を Kronecker delta $\delta_{E,\Sigma n_je_j}$ に，左辺の確率密度関数 $p_n(E)dE$ を確率 $P_n(E)$ に変え，

$$P_n(E)=\sum\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots}\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2}\phi_3^{n_3}\cdots\delta_{E,\Sigma n_je_j} \qquad (34)$$

とすればよい．こうして，式(34)と式(30)は同じことを表わすことになる．

このように第1節で導いた式(5)を用いると，前節でのような制約条件をまもりながら経路を勘定するという煩雑さもなく，ただちに求める結果を手にできる．この例として，離散誤差が e_1 と e_2 の2つの値しかとらない特殊な場合を考える．n 個の誤差の和が E となる確率 $P_n(E)$ は，式(34)からただちに

$$P_n(E)=\sum\frac{n!}{n_1!\,n_2!}\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2}\delta_{E,n_1e_1+n_2e_2} \qquad (35)$$

となることがわかる．あとは，n_2 と ϕ_2 をそれぞれ $n-n_1$ と $1-\phi_1$ に置換え，和を n_1 について0から n までとすればよい．$\delta_{E,n_1e_1+n_2e_2}$ は，和の中から $n_1=(E-ne_2)/(e_1-e_2)$ のただ1つの項だけを抜き出し，その結果はよく知られている二項確率分布の式を与える．

この特殊で簡単な上述の式(35)の誤差系は，「系が一定温度の熱浴に浸っている」という条件下で，統計力学にしばしば登場する．その例として，スピン1/2をもつ n 個の粒子が一様な磁場の中におかれたときにもつ磁気モーメントを求める問題，あるいは，n 個の要素からなる1次元鎖が与えられた長さのもとでもつ張力を求める問題などがある．とくに後者は，簡単なゴム弾性のモデル[7]としても登場する．

おわりに

任意の確率分布をする誤差の和は，その大きさに応じて出現確率が違う．こうした出現確率を求める問題を，1次元の酔歩問題に引き直して考え，式(5)に示されるような一般的で応用性のある1つの式を導いてみた．この式は，誤差が連続的な場合でも，また離散的な場合にでも適用できる．また，この一般的である式(5)を出発点に，加える誤差の個数 n が大きいときに利用できる確率密度関数の漸近形を，鞍点法によって導いてみた．これは同時に，統計学での中心極限定理を示したことにもなる．

第4節で示した離散的な誤差の確率式(30)は，統計力学でよくあらわれる孤立した n 粒子系の微視状態数を与える式[6]と類似している．この類似性をもとに，離散誤差の系と n 粒子系との対応を「強引に」おしすすめることができそうに思える．たとえば，1粒子状態でエネルギー準位 $e_1,e_2,e_3,\cdots$ をもち，互いに区別できる n 個の粒子の集まりを考える．この系が孤立系で，エネルギー e_j の状態にある粒子数を n_j とすると，この孤立系がエネルギー E をもつ巨視状態を実現する微視状態の総数は式(30)で与えられる．このとき，式(29)が孤立系の条件，すなわち外界と交渉がなく粒子総数とエネルギーが一定に保たれる条件に対応する．また，系の巨視的状態であるエネルギー E と誤差の和 E を対応させ，個々の微視的状態である粒子の配り方に，誤差の和が E となる個々の経路を対応させる．さらに，エネルギー e_j の状態にある粒子数 n_j に，経路の中にあらわれる離散誤差 e_j の個数 n_j を，エネルギー e_j のもつ縮退度である量子状態数 ϕ_j には，誤差 e_j の生じる確率 ϕ_j を対応させ，また，粒子が互いに区別できるということを，同じ $(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ をもつ経路群に含まれる各経路が，個々の e_j の並び順でも区別されることに対応させてみる．こうした「強引な」対応から，Maxwell-Boltzmann 粒子系で定義される熱力学的な量や関数を離散的な誤差系に持ち込むことができるなら，誤差系の振舞いを統計力学的に解釈できそうである．このことは興味をそそり，また，一見して有意義のようにもみえる．

しかし，系の大きさのパラメーターである n の大きさの極端な違い，すなわち熱力学系では n が 10^{20} 程度，誤差系ではせいぜい大きくても 10^6 程度であること，また，本稿の1章と2章で対象としたような誤差系では平衡状態や温度という概念が欠如していることなどを考慮すれば，あまり意味はないものと考える．さらに根本的と思われることは，もし微視状態を誤差系での経路に対応させるなら，エネルギー E をもつすべて微視状態が等しい出現確率をもって巨視状態に寄与するという統計力学での等重率の原理が，誤差系においては一様分布を除いて成り立たないことである．したがって，上述の対応関係の追求は興味をそそるが，意味のある成果は期待できそうもないように思われる．

最後に，本稿の校閲に際し，有意義なコメントをくださった本学環境システム学部地域環境学科の矢吹哲夫助教授に厚くお礼申し上げます．

引用文献

1）一瀬正巳：誤差論，p. 2，培風館（1953）．
2）戸川隼人：計算機のための誤差解析の基礎，p. 11，サイエンス社（1974）．
3）一松　信：数値計算，pp. 8-9，近代数学新書（1963）．
4）戸川隼人：計算機のための誤差解析の基礎，p. 45，サイエンス社（1974）．
5）A.I. Khinchin: Mathematical Foundation of Statistical Mechanics, p. 166, Dover Publications, New York, 1949.
6）中村　伝：統計力学，p. 93，岩波全書（1967）．
7）久保亮五：ゴム弾性［初版復刻版］，pp. 58-66，裳華房（1996）．

Summary

When we consider the occurrence probability for the sum of independent random errors, it is necessary to use the probability distribution function. Based on a general formula (5) derived in this paper, however, we arrived at the required function immediately. This useful formula is applicable to any continuous or discrete error.

Moreover, when the number of accumulated errors is large enough, the asymptotic form of this general formula can be derived from the method of steepest descent. This result shows an alternative approach to the central limit theorem in statistics.